# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1918. Redaktionsschluß für No. 22 am 11. Oktober 1918. 19. Jahrgang.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

A. Rubinowicz, Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes. I. Teil. S. 441.

**Zusammenfassende Bearbeitungen:**

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil II. S. 446.

**Besprechungen:**

A. Wegener, Das detonierende Meteor vom 3. April 1916 in Kurhessen. S. 462.

A. Sommerfeld, Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen. S. 463.

H. Bock, Die Uhr. Grundlagen und Technik der Zeitmessung. S. 463.

R. Biedermann, Die Sprengstoffe. S. 464.

F. A. Schulze, Große Physiker. S. 464.

**Personalien.** S. 464.

**Gesuche.** S. 464.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes [1]).

I. Teil.


Von A. Rubinowicz.


Die Bohr-Sommerfeldsche Theorie der wasserstoffähnlichen Serienspektren fußt im wesentlichen auf zwei Annahmen:

Die erste bestimmt in der Mannigfaltigkeit der möglichen Elektronenbahnen durch Quantenbedingungen eine diskrete Schar „stationärer" Zustände. Gemäß der zweiten Voraussetzung strahlt ein Elektron, das aus einer Quantenbahn $A$ in die Bahn $E$ übergeht, eine monochromatische Lichtwelle aus, deren Frequenz $\nu$ durch die Bohrsche Frequenzbedingung

$$h\nu = W_A - W_E \qquad (1)$$

gegeben ist. $W_A$ und $W_E$ sind die den beiden Quantenzuständen $A$ und $E$ entsprechenden Energiewerte.

Für den uns zunächst interessierenden Fall, daß kein äußeres Feld auf das Atom einwirkt, wird eine stationäre Bahn durch die „azimutale" und die „radiale" Quantenbedingung

$$\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = 2\pi p_\varphi = nh, \qquad \int p_r \, dr = n' h$$

festgelegt.

Unsere Überlegungen knüpfen an die Tatsache an, daß das für die stationäre Bahn $A$ (Quantenzahlen $m$, $m'$) durch

$$p_\varphi = \frac{mh}{2\pi}$$

gegebene Impulsmoment des Atoms beim Übergange des Elektrons in die Bahn $E$ (Quantenzahlen $n$, $n'$) sich im allgemeinen ändern wird. Da nach der klassischen Elektrodynamik für das System:

„Atom + das beim Elektronenübergange ausgestrahlte elektromagnetische Feld"

der Satz von der Erhaltung des Impulsmomentes gelten sollte, so entsteht für uns die Frage, inwieweit dieser ganz fundamentale, in seiner Bedeutung weit über die klassische Elektrodynamik hinausragende Satz auch bei einer solchen Bohrschen Ausstrahlung erfüllt ist, d. h. inwieweit die aus diesem Satze gezogenen Folgerungen, die vor allem in einem Auswahlprinzip und in einer, wenn auch nicht ganz vollständigen Polarisationsregel gipfeln, sich an den spektroskopischen Beobachtungen bestätigen lassen.

Wir erörtern im folgenden zunächst die Verhältnisse bei Abwesenheit eines äußeren elektrischen oder magnetischen Feldes. Von den hier erhaltenen Ergebnissen läßt sich direkt an der Erfahrung nur das Auswahlprinzip an den Feinstrukturen der Balmer- und der Helium-Linien prüfen. Es ist sehr bemerkenswert, daß unser Auswahlprinzip im allgemeinen, wenn auch nicht inhaltlich, so doch wenigstens praktisch, die „exaktere Fassung" der Sommerfeldschen Quantenungleichungen:

$$m' > n' \text{ ausnahmslos gültig,}$$
$$m \geq n \text{ im allgemeinen gültig}$$

zu ersetzen vermag. Nur die schwächste, am weitesten gegen Rot hin gelegene Komponente im Gleichstrombilde der Heliumlinien 4686 Å.-E. und 3203 Å.-E. dürfte nach dem zunächst erhaltenen Auswahlprinzip nicht beobachtbar sein, was sich dann später bei Erörterung des Stark-Effektes zwanglos durch den Einfluß

1) Als die vorliegende Arbeit schon fertiggestellt war, erschien der erste Teil einer Abhandlung von N. Bohr (On the Quantum Theory of Line-Spectra, Kopenhagener Akademie 1918), in deren Fortsetzung aus der Forderung, daß im Grenzfalle langer Wellen die klassische Elektronen- und die neuere Quantentheorie miteinander übereinstimmen müssen, u. a. vermutlich auch die hier erhaltenen Ergebnisse abgeleitet werden dürften. Auf die Bedeutung unserer Beziehung (6) für den Fall zirkular-polarisierter Wellen wird bereits am Schlusse des erschienenen ersten Teiles der Bohrschen Abhandlung hingewiesen. Auf den Rat von Herrn Prof. Sommerfeld, dem ich auch hier für sein freundliches Interesse an der vorliegenden Arbeit danken möchte, habe ich mich aber dennoch mit Rücksicht auf die prinzipielle Bedeutung, die bei uns dem Satze von der Erhaltung des Impulsmomentes beigemessen wird, und auf unsere mehr axiomatische Begründung der Resultate zur Publikation meiner Arbeit entschlossen.

des elektrischen Feldes (das ja bei jeder Entladung vorhanden ist) erklären läßt. Dasselbe gilt von der großen Anzahl der Komponenten in der mit Funkenanregung erhaltenen Feinstruktur der Heliumlinie 4686.

Einen schönen Erfolg unserer Theorie liefert ihre Anwendung auf den Zeeman-Effekt. Wir sind hier nicht nur imstande, das Fehlen der nach der Sommerfeld-Debyeschen Theorie zu erwartenden überzähligen Linien zu erklären, sondern können auch bis zu einem gewissen Grade über die Polarisationsverhältnisse (Auftreten und Lage der zirkularpolarisierten Komponenten) Aufschluß erteilen.

Beim Stark-Effekt erhalten wir vor allem eine Erklärung der Epsteinschen Polarisationsregel.

Wenn wir im folgenden unsere Überlegungen stets so anstellen, als ob das übergehende Elektron ganz nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlen würde, so ist dies in Wirklichkeit nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit, nicht aber jene Auffassung des Sachverhaltes, die wir hier vertreten möchten. Wir wollen uns vielmehr das Atom und den durch die Maxwellschen Gleichungen beherrschten Äther als ein einziges einheitliches System denken, für das uns als Ideal die Aufstellung einer einheitlichen Quantenbedingung vorschwebt. Dies läßt sich jedoch vorläufig noch nicht durchführen, da wir die gegenseitige Beeinflussung, also sozusagen die Koppelung, der beiden Einzelsysteme nicht kennen. Wir kommen auf diesem Wege jedoch schon ein beträchtliches Stück vorwärts, wenn wir von der Koppelung nur voraussetzen, daß sie das Erfülltsein der Sätze von der Erhaltung der Energie und des Drehimpulses für das System „Atom + Äther" gewährleistet. Zum Beweise der Bohrschen Frequenzbedingung genügt schon die speziellere Annahme, daß allein der Energiesatz beim Strahlungsvorgange besteht, wobei noch die Voraussetzungen notwendig sind, daß vor der Ausstrahlung das Atom in irgendeinem Quantenzustande sich befindet und nach der Ausstrahlung, wo Atom und Äther aufeinander nicht mehr einwirken, sowohl das Atom, als auch die forteilende Strahlung, jedes für sich, gequantelt sind und daß ein „Ätheroszillator" nur ein einziges Energiequantum aufnehmen kann [1]). In der vorliegenden Mitteilung wollen wir nun aber die Konsequenzen der weiteren Annahme ziehen, daß für das System „Atom + Äther" auch der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses gilt.

Von unserem Standpunkte aus denken wir uns, daß das strahlende Atom dem Äther einen gewissen Betrag an Energie und Impulsmoment zur freien Verfügung überläßt und daß die eigentliche Ursache für den Schwingungscharakter im Äther und nicht im Atom gelegen ist. Bei dem Strahlungsvorgang entsteht für den Äther die Aufgabe, gemäß den Maxwellschen Gleichungen eine Welle zu formen, die die verfügbaren Energie- und Impulsgrößen aufnimmt. Diese Welle sowie die Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen im Äther ist nach unserer Auffassung physikalisch gesichert. Wenn wir weiterhin diese entstehende Welle auch durch eine Elektronenschwingung am Orte des Atoms im Sinne der Theorie des Hertzschen Dipols beschreiben werden, so halten wir diese an das klassisch strahlende Elektron anknüpfende Vorstellung nicht für physikalisch wirklich. Sie ist, wie wir oben sagten, nur ein Zugeständnis an unsere Bequemlichkeit. In der Tat können wir auf Grund der in der klassischen Theorie ausgearbeiteten Formeln am einfachsten und plausibelsten die Singularitäten angeben, die am Orte des leuchtenden Atoms vorhanden sein müssen. Die eigentliche Ursache für das Entstehen der Lichtwelle sehen wir dagegen in der quantenmäßigen Zustandsänderung des Atoms. Um stets im Auge zu behalten, daß wir bei den folgenden Erörterungen das nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlende Elektron einzig nur im Sinne der obigen Auffassung verwenden, wollen wir es zeitweilig auch als das „Ersatzelektron" bezeichnen.

Es ist selbstverständlich, daß wir im Sinne der Bohrschen Frequenzbedingung die beim Elektronenübergange entstehende Kugelwelle uns streng monochromatisch denken und daher unser Ersatzelektron rein harmonisch schwingen lassen. Dessen ungeachtet legen wir den Betrachtungen der beiden ersten Paragraphen eine beliebige periodische Umlaufsbahn des Ersatzelektrons zugrunde, um mit Rücksicht auf die Feinstruktur der Heliumlinie 4686 A.-E. zu zeigen, daß wir das Auswahlprinzip (12) nicht umgehen können, auch wenn wir unsere Auffassung des Strahlungsvorganges aufgeben, und uns vorstellen, daß der Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn in eine

[1]) Vgl. L. Flamm, diese Zeitschr. **19**, 116, 1918 und die Ansprache von Prof. Sommerfeld bei der Planck-Feier in der Deutsch. Phys. Ges. zu Berlin am 26. April 1918 (inzwischen erschienen in der Broschüre: Zu Max Plancks sechzigstem Geburtstag, Karlsruhe 1918, Verlag der C. F. Müllerschen Hofbuchhandlung), wo diese Überlegungen des Verfassers mitgeteilt und als Versöhnung der Undulations- und Quantenhypothese gedeutet wurden.

andere in irgendeiner Weise, etwa in einer Spiralbahn erfolgt, wobei das Elektron nach den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik strahlt. Unser Auswahlprinzip (12) wird nämlich, wie wir zeigen, auch unter der Annahme erhalten, daß das strahlende Elektron eine beliebige periodische Bahn durchläuft, deren Größe und Gestalt sich auch langsam ändern kann.

§ 1. Zusammenhang zwischen der Ausstrahlung von Energie und Drehimpuls bei einer elektromagnetischen Kugelwelle. Wir betrachten das Strahlungsfeld eines in einer geschlossenen Bahn mit der Periode $\tau = 1/\nu$ sich bewegenden Elektrons, das wir uns durch einen entsprechenden Hertzschen Oszillator ersetzt denken, und wollen eine Beziehung zwischen dem Drehimpuls und der Energie, die die von diesem Oszillator entsandte elektromagnetische Welle trägt, kennen lernen[1].

Der die Lage des Elektrons bestimmende Radiusvektor $\mathfrak{s}$ wird sich durch eine Fouriersche Reihe

$$\mathfrak{s} = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{a}_n \cos 2\pi\nu n t + \mathfrak{b}_n \sin 2\pi\nu n t) \quad (2)$$

darstellen lassen, wo $\mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_n$ von der Zeit unabhängige Vektoren bedeuten. In dem uns besonders interessierenden Falle eines harmonisch schwingenden Ersatzelektrons ist speziell

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 \cos 2\pi\nu t + \mathfrak{b}_1 \sin 2\pi\nu t. \quad (3)$$

Nach M. Abraham[2] ist dann der von unserem Elektron in der Sekunde ausgestrahlte Drehimpuls, wie man unschwer aus dem ausgestrahlten Felde berechnet, gleich

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} [\ddot{\mathfrak{s}}\,\dot{\mathfrak{s}}] \quad (4)$$

während nach Hertz die sekundlich ausgestrahlte Energie[3]

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathfrak{s}}^2$$

beträgt. Mithin wird während einer Schwingung an Drehimpuls

$$\Delta\mathfrak{J} = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} [\ddot{\mathfrak{s}}\,\dot{\mathfrak{s}}]\, dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^3}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 [\mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_n]$$

und an Energie

$$\Delta W = \int_0^{1/\nu} \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathfrak{s}}^2\, dt = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{(2\pi\nu)^4}{2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \frac{(\mathfrak{a}_n^2 + \mathfrak{b}_n^2)}{2}$$

ausgestrahlt. Zwischen $\Delta\mathfrak{J}$ und $\Delta W$ besteht demnach die Beziehung:

$$\Delta\mathfrak{J} = \frac{\Delta W}{2\pi\nu} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,[\mathfrak{a}_n \mathfrak{b}_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4 (\mathfrak{a}_n^2 + \mathfrak{b}_n^2)}. \quad (5)$$

Selbstverständlich kann unter $\Delta\mathfrak{J}$ auch der während einer hinreichend viele Schwingungen umfassenden Zeit ausgestrahlte Drehimpuls und unter $\Delta W$ die in der gleichen Zeit ausgestrahlte Energie verstanden werden. Schließlich bleibt (5) angenähert auch richtig, wenn die Vektoren $\mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_n$ nicht, wie wir es vorausgesetzt haben, von der Zeit unabhängig sind, sondern sich mit der Zeit langsam ändern und wir $\Delta\mathfrak{J}$ und $\Delta W$ für ein Zeitintervall nehmen, in dem zwar $\mathfrak{a}_n$ und $\mathfrak{b}_n$ merklich konstant sind, das andererseits aber gegenüber $1/\nu$ doch schon hinreichend groß ist. (5) gilt mithin, auch wenn das Elektron in einer Spiralbahn läuft, die durch langsame Änderung der Größe und Gestalt einer geschlossenen, periodischen Bahn entsteht.

Für den Fall einer rein zirkularen Schwingung des Elektrons, wo $\mathfrak{a}_1$ senkrecht zu $\mathfrak{b}_1$ steht und beide ihrem absoluten Betrage nach gleich sind, während sonst

$$\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

ist, wird (5) gleich

$$\Delta\mathfrak{J} = \frac{\Delta W}{2\pi\nu}, \quad (6)$$

und läßt sich für diesen Sonderfall nach H. Busch[1] einfach aus dem Energiesatze ableiten. Wir bemerken aber, daß während bei der früher angedeuteten Ableitung die Beziehung (5) aus dem ausgestrahlten Felde allein erhalten werden kann, bei der energetischen Ableitung von (6) die Vorstellung eines Ersatzelektrons nicht gut auszuschalten ist.

§ 2. Die Bohrsche Frequenzbedingung und der Satz von der Erhaltung des Drehimpulses. Auswahlprinzip. Wir stellen die folgenden Überlegungen unter der Annahme an, daß unser Atom weder der Einwirkung eines elektrischen, noch der eines magnetischen Feldes unterliegt. Das Impulsmoment des Atoms vor und nach der Ausstrahlung möge durch die Vektoren $\mathfrak{p}_m$ und $\mathfrak{p}_n$ mit den Absolutbeträgen $\frac{mh}{2\pi}$ und $\frac{nh}{2\pi}$ gegeben sein. Bezeichnet $\vartheta$ den Winkel zwischen $\mathfrak{p}_m$ und $\mathfrak{p}_n$ so verliert das Atom bei einem Elektronenübergang ein Impulsmoment $\Delta\mathfrak{J}$ vom absoluten Betrage

1) M. Abraham, diese Zeitschr. **15**, 914, 1914; H. Busch, diese Zeitschr. **14**, 455, 1913.

2) M. Abraham, l. c.

3) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität, Bd. 2, 3. Aufl., S. 63. Leipzig 1914.

1) H. Busch, l. c. und M. Abraham, diese Zeitschr. **15**, 914, 1914.

$$|\mathfrak{v}_m - \mathfrak{v}_n| = \frac{h}{2\pi}\sqrt{m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\vartheta} \qquad (7)$$

und die Energie

$$AW = W_{m,m'} - W_{n,n'} \qquad (8)$$

Nach (5) haben wir also:

$$h\nu\sqrt{m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\vartheta} = (W_{m,m'} - W_{n,n'})\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,[a_n\, b_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4\,(a_n^2 + b_n^2)}$$

Dies kann aber mit der Bohrschen Frequenzbedingung (1) nur dann in Einklang gebracht werden, wenn

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\vartheta} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,[a_n\, b_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4\,(a_n^2 + b_n^2)} \qquad (9)$$

ist. Es ist jedoch offenbar

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,[a_n\, b_n]\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,|[a_n\, b_n]| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,|a_n|\cdot|b_n|$$

und da

$$2\,|a_n|\cdot|b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$$

und daher auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\,n^3\,|a_n|\cdot|b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4\,(a_n^2 + b_n^2)$$

so ist

$$\left|\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n^3\, 2\,[a_n\, b_n]}{\sum_{n=1}^{\infty} n^4\,(a_n^2 + b_n^2)}\right| \leq 1. \qquad (10)$$

Mit Rücksicht auf

$$|m - n| \leq \sqrt{m^2 + n^2 - 2\,m\,n\cos\vartheta} \qquad (11)$$

ergibt sich daher aus (9) und (10):

$$|m - n| \leq 1. \qquad (12)$$

d. h. $m - n = -1, 0, +1$.

Wir erhalten daher zunächst als Resultat das folgende Auswahlprinzip:

Ein mit Ausstrahlung verbundener Übergang des Elektrons aus einer stationären Bahn $(m, m')$ in eine andere $(n, n')$ $(m + m' > n + n')$ kann nicht in beliebiger Weise erfolgen, sondern ist an die Bedingung geknüpft, daß sich dabei die das Impulsmoment des Atoms bestimmende azimutale Quantenzahl $m$ höchstens um eine Eins ändert.

Dieses Resultat gilt offenbar nicht nur für die wasserstoffähnlichen Spektren, sondern ganz allgemein für alle Fälle wo kein äußeres Feld vorhanden ist und von allen das Atom konstituierenden Elektronen nur eines in eine neue stationäre Bahn übergeht. Es bleibt schließlich, wie wir in der Einleitung hervorgehoben haben, auch richtig, wenn wir uns denken, daß der Übergang des Elektrons in einer in § 1 näher charakterisierten Spiralbahn erfolgt.

§ 3. Polarisationsverhältnisse. Doch auch über den Zusammenhang zwischen den Polarisationsverhältnissen der emittierten Strahlung und der Lage der Anfangs- und der Endbahn des Elektrons können wir leicht einigen Aufschluß gewinnen. Von den drei in (12) enthaltenen Möglichkeiten betrachten wir zunächst die beiden Fälle

$$m - n = +1, \qquad (13)$$

die ersichtlich nur dann bestehen können, wenn in den beiden Ungleichungen (10) und (11) die Gleichheitszeichen gelten. Da für $n \leq 2$ jedesmal wenn $a_n$ und $b_n$ nicht beide zugleich verschwinden,

$$n^3\, 2\,|a_n|\cdot|b_n| < n^4\,(a_n^2 + b_n^2)$$

so erfordert (10) offenbar daß

$$a_n = b_n = 0 \text{ für alle } n = 2, 3, 4, \ldots$$

und daß

$$2\,|[a_1\, b_1]| = a_1^2 + b_1^2$$

d. h. daß die Vektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ ihrem absoluten Beträge nach gleich groß sind und zueinander senkrecht stehen. Das Ersatzelektron bewegt sich also im Falle (13) auf einem Kreise und sendet streng monochromatisches zirkular polarisiertes Licht aus. Das Gleichheitszeichen in der Ungleichung (11) verlangt dann, daß $\vartheta = 0$ ist, d. h. daß die stationären Anfangs- und Endbahnen in der gleichen Ebene liegen. Da das ausgestrahlte Impulsmoment auch vektoriell mit dem beim Elektronenübergange vom Atome verlorenen übereinstimmen muß, läuft jetzt unser Ersatzelektron in der gemeinsamen Ebene der stationären Anfangs- und Endbahn. Damit sind aber in diesen beiden Fällen selbst bei Mitberücksichtigung der allgemeinen Elektronenbahnen (2) die Polarisationsverhältnisse vollkommen bestimmt.

Nicht ebenso eindeutig festgelegte Resultate erhalten wir in dem noch zu betrachtenden Falle

$$m - n = 0$$

auch dann nicht, wenn wir im Sinne der Einleitung von der Betrachtung allgemeinerer als harmonischer Schwingungen des Ersatzelektrons absehen und uns auf die Betrachtung des Elektrons in der Grundschwingung beschränken. Für die allgemeinere Bahn (2) und die speziel-

lere (3) ergibt sich aus (9) und (10) in beiden Fällen nur die gleiche, die Größe des Winkels $\vartheta$ einschränkende Relation

$$1 > \cos\vartheta > 1 - \frac{1}{2n^2} \qquad (14)$$

(9) liefert dann für jeden der Ungleichung (14) entsprechenden Winkel $\vartheta$ im Falle der Bahn (2) nur ein ungefähres Maß für die Abweichung der Bahnkurve des strahlenden Elektrons von der Kreisform. In dem für uns eigentlich wichtigen Falle der rein harmonischen Schwingung des Ersatzelektrons wird durch (9) dagegen jedem nach (14) zulässigen Winkel $\vartheta$ eine bestimmte, mit kleiner werdendem $\vartheta$ abnehmende Exzentrizität der Bahnellipse zugeordnet. Insbesondere entspricht

$$\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2} \text{ nach (7) } |\mathfrak{p}_m - \mathfrak{p}_n| = \frac{h}{2\pi}$$

also, wie soeben gezeigt, einer zirkular-polarisierten Lichtwelle, während in dem anderen Grenzfalle von (14) ($\cos\vartheta = 1$) aus (9) $[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1] = 0$ folgt, d. h. $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{b}_1$ haben die gleiche Richtung, das Elektron strahlt also linear-polarisiertes Licht aus. Wir bemerken, daß im Zeemaneffekt (s. u. § 7) für $m-n = 0$ eben der letztere Grenzfall der wirkliche zu sein scheint. Was nun die räumliche Lagerung der im Falle $m-n = 0$ von unserem harmonisch schwingenden Ersatzelektron ausgesandten elliptisch-polarisierten Welle betrifft, so wird durch die Forderung, daß das beim Elektronenübergange vom Atome abgegebene Impulsmoment auch seiner Richtung nach sich in der ausgestrahlten Kugelwelle wiederfinden soll, nur die Lage der Normalen auf die Ebene der elliptischen Bahnkurve unseres Ersatzelektrons bestimmt. Die Lage der Achsen dieser Ellipse ist dadurch noch keineswegs gegeben. Wir können daher aus unseren Überlegungen im Grenzfalle $\cos\vartheta = 1$, wo die Ebenen der Anfangs- und Endbahn zusammenfallen und dadurch auch noch die Lage dieser Normalen unbestimmt wird, über die räumliche Orientierung der jetzt zu einer Geraden ausgearteten Ellipse überhaupt nichts aussagen.

§ 4. Energetische Ableitung der Polarisationsverhältnisse für den Fall der zirkular-polarisierten Welle. Die obigen auf zirkularpolarisierte Wellen[1]) bezüglichen Überlegungen lassen sich zum großen Teile schon aus unserer Annahme herleiten, daß bei einem mit der Ausstrahlung einer solchen Lichtwelle verbundenen Elektronenübergange der gesamte freiwerdende Überschuß an Energie und Drehimpuls an die entstehende (nach der Bohrschen Frequenzbedingung) monochromatische Lichtwelle übergeht und daß die schon aus energetischen Betrachtungen für das Ersatzelektron sich ergebende Beziehung (9) erfüllt ist.

Für zirkular-polarisiertes Licht folgt nämlich aus (6), (7) und (8) mit Rücksicht auf die Bohrsche Frequenzbedingung zunächst

$$\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn\cos\vartheta} = 1, \qquad (15)$$

was zusammen mit (11) das Auswahlprinzip (12) gibt. Im Falle $m-n = +1$ der Ungleichung (12) liefert dann (15) $\vartheta = 0$, d. h. die stationären Anfangs- und Endbahnen liegen in der gleichen Ebene. Daraus folgt aber nach (7), daß das Atom beim Strahlen einen Drehimpuls verliert, dessen Achse senkrecht auf dieser Ebene steht, womit die Orientierung der zirkular-polarisierten Welle im Raume gegeben ist. Für $m-n = 0$ wird, wenn zirkular-polarisiertes Licht emittiert werden soll, $\vartheta$ nach (15) durch $\cos\vartheta = 1 - \frac{1}{2n^2}$ bestimmt. Wie wir bereits bemerkt haben, zeigt jedoch die Erfahrung am Zeemaneffekt, daß gerade im Falle $m-n = 0$ linear-polarisiertes Licht ausgesendet wird. In diesem Falle wird aber überhaupt kein Drehimpuls ausgestrahlt, und die jetzt eben gemachten Überlegungen sind daher hier nicht anwendbar.

Man kann selbstverständlich jetzt die Voraussetzungen und Folgerungen teilweise umkehren und für zirkular-polarisiertes Licht und den Sonderfall $m-n = +1$ die Bohrsche Frequenzbedingung auch auf diesem Wege beweisen. Die wahre Ursache für ihr Bestehen sehen wir aber im Sinne der Einleitung in der Möglichkeit, den Äther zu quanteln.

Wenn wir auch auf dem jetzigen Wege unsere früheren Ergebnisse im wesentlichen wieder erhalten, so hat sich doch der frühere umständlichere, mehr ins Einzelne gehende Weg schon deshalb nicht als überflüssig erwiesen, als wir uns dort überzeugen konnten, daß unserem Auswahlprinzipe (12) eine viel umfassendere Bedeutung zukommt, als es nach unseren letzten Erörterungen scheinen könnte, in denen (12) nur als eine einschränkende Bedingung für den Sonderfall zirkular-polarisierter Wellen auftritt. Die formelle Übereinstimmung des jetzigen und des früheren Auswahlprinzipes ist offenbar in dem Umstand begründet, daß die Kreisbahnen bei gegebener Frequenz und gegebener ausgestrahlter Energie den größten Betrag an Drehimpuls aussenden. Nach den Überlegungen des § 2 hat ja das Verhältnis $\frac{|\triangle \mathfrak{J}|}{\triangle W}$ [vgl. Formel (10)] für eine Kreisbahn den größten Betrag.

[1]) Als zirkular-polarisierte Wellen bezeichnen wir abkürzend stets Kugelwellen, die von einem zirkular schwingenden Ersatzelektron emittiert gedacht werden können.

# ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

## Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen.

Von W. Voigt.

### Spezieller Teil II.

### VI. Klasse. Drei zueinander normale gleichartige Achsenscharen.

Fundamentale Sätze der Kristallographie lehren, daß (wenn man zwei entgegengesetzte Richtungen als nur eine einzige auffaßt) sechszählige Symmetrieachsen nur einzeln auftreten, vierzählige nur einzeln oder zu drei zueinander normalen verbunden, dreizählige nur einzeln oder zu vier in die Diagonalen eines Würfels fallenden verbunden. Dabei verlangt das letzte System das gleichzeitige Auftreten von drei entweder zwei- oder vierzähligen Symmetrieachsen in den Richtungen der Würfelachsen, und diese drei Achsen sind dann in dem Sinne gleichwertig, daß die durch jede einzelne zwei- oder vierzählige Achse unter sich verknüpften Flächenpole durch die dreizählige Deckdrehung mit denen der anderen zum Austausch kommen. Die Polyeder mit diesen Achsensystemen sind diejenigen des regulären Kristallsystems.

Den vorstehenden Sätzen entsprechen analoge in der Strukturtheorie; sie lassen die Strukturtypen des regulären Systems charakterisiert sein durch drei zueinander normale Scharen zwei- oder vierzähliger Dreh- oder Schraubenachsen, die in dem Sinne einander gleichwertig sind, daß die durch die Deckoperationen je der einen Schar in sich verknüpften Atomsysteme durch eine dreizählige Deckdrehung um die Richtung einer Diagonalen des orthogonalen Systems mit den anderen zum Austausch gelangen. Um die Strukturtypen dieses Charakters handelt es sich im vorliegenden letzten Teil der systematischen Zusammenstellung.

#### Abteilung A. Zweizählige Achsen.

Die Typen dieser Abteilung gehen durch Spezialisierung aus solchen der Abteilung B der II. Klasse hervor. Jene Typen sind durch zweizählige Haupt- oder Vertikalachsen und dazu normale zweizählige Neben- oder Querachsen charakterisiert, wobei die Nebenachsen jederzeit in zwei zueinander normalen Richtungen auftreten. Gleichwertig in dem oben geprägten Sinne sind nun allerdings diese drei zueinander normalen Achsensysteme der Klasse II B im allgemeinen nicht; es befinden sich aber unter ihnen solche, denen bei speziellen Verfügungen über die Grundstrecken $a$, $b$, $c$ diese Eigenschaft erteilt werden kann. Es sind dies die Typen Nr. 5, 8, 10, 11, 13 und nur diese, da nur sie Achsen derselben Art in den drei zueinander normalen Richtungen besitzen.

Die Spezialisierung geschieht in dem Sinne, daß gewisse durch die zweizähligen Achsen bestimmte und mit ihren Kanten diesen parallele rechteckige Zellen kubische Form erhalten und damit die Einfügung einer diagonalen dreizähligen Drehachse gestatten. Man kann diese Zelle so wählen, daß ihre Kantenlängen mit den ihnen parallelen Deckschiebungen zusammenfallen, die mit

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \quad \text{bei} \quad a_1 = a_2 = a_3$$

bezeichnet werden mögen. Die figürliche Darstellung wird (ebenso wie in den früheren Fällen, an die angeknüpft werden soll) durchsichtiger bei Beschränkung auf den achten Teil eines solchen Elementarbereichs, also einem Würfel mit den Kanten $\frac{1}{2}\,a_h$; man kann einen solchen „Achtelwürfel" in jedem Falle nach der bloßen Anschauung leicht zum vollen Elementarwürfel ergänzen.

Dabei ist indessen zu bemerken, daß, wenn auch kristallographisch mit drei zueinander normalen gleichwertigen Achsen die Existenz einer dreizähligen Achse in jedem Oktantenpaar zwischen den zweizähligen Achsen verknüpft ist, doch unter analogen Umständen keineswegs jede der vier Diagonalen eines Achtelwürfels eine dreizählige Achse des Atomsystems zu sein braucht. Vielmehr kann u. A. nur eine einzige diese Eigenschaft besitzen; die Gleichwertigkeit aller vier Diagonalen kommt dann dadurch zum Ausdruck, daß in den acht Teilwürfeln jede Gattung von Diagonalen zweimal die Rolle einer dreizähligen Achse spielt.

Um ein Beispiel dafür zu geben, seien die vier Achtelwürfel der unteren und der oberen Schicht des Vollwürfels (mit den Kanten $a_h$) nach dem Schema $\begin{matrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{matrix}$ bzw. $\begin{matrix}6 & 5\\ 7 & 8\end{matrix}$ numeriert und die Würfeldiagonalen $\overline{1,5}$ mit $a$, $\overline{2,6}$ mit $b$, $\overline{3,7}$ mit $c$, $\overline{4,8}$ mit $d$ bezeichnet. Ist dann in den Achtelwürfeln 1 und 5 die Diagonale $\parallel a$, in 2 und 6 die $\parallel d$, in 3 und 7 die $\parallel b$, in 4 und 8 die $\parallel c$ dreizählige Achse, so liegt das oben geschilderte Verhältnis vor, daß jeder Achtelwürfel nur eine dreizählige Symmetrieachse besitzt (die zusammen ein „windschiefes" System geben), und daß doch dabei im Vollwürfel alle vier Diagonalen gleichwertig sind.

Die figürliche Darstellung geschieht im

übrigen weiterhin nach den oben benutzten Prinzipien (—— Dreh-, – – – Schraubenachse). Die vordere untere Ecke des gezeichneten Achtelwürfels spielt gewissermaßen die Rolle des Koordinatenanfangs, indem von ihr z. B. die drei Grundstrecken $a_1$, $a_2$, $a_3$ ausgehend gedacht sind. Die Begrenzung und Orientierung des Achtelwürfels ist dabei so gewählt, daß jedenfalls die von diesem Eckpunkt ausgehende Diagonale eine dreizählige Achse ist. Demgemäß ist diese Begrenzung nicht stets identisch mit der des rechteckigen Parallelepipedon in den Figuren für die Typen II B, aus welchen die neuen regulären abgeleitet werden. Es wird hierauf im einzelnen Falle hingewiesen werden.

Was die Anordnung der Deckoperationen in der Strukturformel angeht, so sind wieder die Dreh- bzw. Schraubenachsen an die Spitze gestellt und die Deckschiebungen daran geschlossen. Die Verwendung der Drehungen und Schraubungen allein liefert aus einem Ausgangsatom eine charakteristische elementare Gruppe von 12 Atomen, deren Wiederholung gemäß den Deckschiebungen dann den Gesamtaufbau ergibt. Je nachdem die Deckschiebungen dem Bravais-Gitter $\Gamma_r$, $\Gamma_r'$ oder $\Gamma_r''$ in § 5 entsprechen, kommen von diesen Elementargruppen dem Vollwürfel eine, vier oder zwei zu. Für den ersten Teil dieser Operation bedient man sich in gewissen Fällen mit Vorteil der Konstruktion auf der Kugelfläche.

Unter den auftretenden verschiedenen elementaren Gebilden sei dasjenige hervorgehoben, das durch drei zueinander normale sich schneidende Drehachsen $\mathfrak{A}_h$ (2,0) bestimmt ist, und das, wie man leicht einsieht, mit der Polfigur der allgemeinsten Form der regulären Tetartoedrie ($A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2$), dem tetraedrischen Pentagondodekaeder, übereinstimmt. Sohncke bezeichnet dieses Atomsystem als „regulären Zwölfpunkter".

Fig. 60, die als Darstellung der zwei Halbkugeln in stereographischer Projektion zu verstehen ist, gibt sowohl in den ●, wie den ○ eine Anschauung von dieser Anordnung in den beiden enantiomorphen Formen. Bei Hinzutreten eines Spiegelpunktes im Kugelmittelpunkt vervollständigt sich der Zwölfpunkter zu dem aus ● und ○ zusammengesetzten „zentrischen Vierundzwanzigpunkter". Ein außerhalb liegender Spiegelpunkt erzeugt zu einem Zwölfpunkter in korrespondierender Lage das Gegenbild. In beiden Fällen müssen auch die Atome ● und ○ sich spiegelbildlich entsprechen.

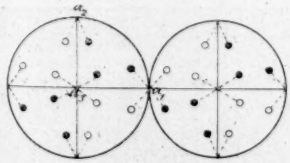


Fig. 60.

Der Übergang von den oben genannten Typen der Abteilung II B zu den neuen regulären ist in jedem Falle äußerst einfach. Nr. 5, $\mathfrak{A}$ (2,0), $\mathfrak{D}_a$ (2,0), a, b, c besitzt nach Fig. 22 parallel a, b, c zweizählige Drehachsen; die Verfügung $|a| = |b| = |c|$ und Hinzunahme einer dreizähligen Achse $\mathfrak{D}$ (3,0) in einer Diagonale führt von dem in Fig. 22 dargestellten Prisma direkt zu dem Achtelwürfel eines ersten regulären Typs mit lauter Drehachsen in den Würfelkanten.

### Nr. 53. Kubisches Zwölfpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3$ (2,0), $\mathfrak{D}$ (3,0), $a_3$. Abhängige Achsen: $\mathfrak{A}_1$ (2,0) und $\mathfrak{A}_2$ (2,0) durch den o-Punkt gehend, entsprechend der von dieser Ecke ausgehenden diagonalen Achse $\mathfrak{D}$ (3,0). In den Gegenkanten drei durch $\mathfrak{D}$ (3,0) gleichfalls verknüpfte Achsen $\mathfrak{D}_h$ (2,0). In den Zwischenkanten abwechselnd sich entsprechende Achsen $\mathfrak{B}_h$ (2,0) und $\mathfrak{C}_h$ (2,0) (Fig. 61). Das Atomsystem besteht

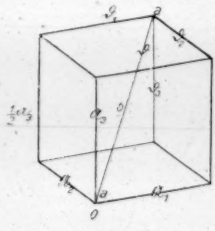


Fig. 61. Nr. 53.

für den gezeichneten Achtelwürfel aus einem nach den Kanten $a_1$, $a_2$, $a_3$ orientierten Zwölfpunkter um den o-Punkt; durch seine Wiederholung um alle Knotenpunkte eines leeren kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken $a_h$ entsteht daraus der gesamte Aufbau des Typs. (Sch. $\mathfrak{T}^1$.)

Nr. 53a. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{A}_h$ oder $\mathfrak{D}_h$; (Sch. $\mathfrak{T}_h^1$),

b) im Mittelpunkt der Diagonale zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{T}_h^2$.)

Nr. 53$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei benachbarte $\mathfrak{A}_h$ und $\mathfrak{D}_h$. (Sch. $\mathfrak{T}^1_d$.)

Nr. 53$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathfrak{T}^4_d$.)

Verdoppelt man das in Fig. 27 dargestellte, für Nr. 10, $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{C}_e(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$ charakteristische Prisma[1]), indem man die Wiederholung (mit vertauschten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) davor setzt, so erkennt man, daß das Mittelstück zwischen zwei Achsenebenen $\mathfrak{D}$ ein Prisma von den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$ gibt, mit Drehachsen in allen Kanten und parallelen Schraubenachsen durch das Zentrum. Die Verfügung $a = b = c$ führt zu dem Achtelwürfel eines zweiten regulären Typs, mit Drehachsen in den Würfelkanten.

## Nr. 54. Rhombendodekaedrisches Zwölfpunktersystem[1]).

Formel: $\mathfrak{A}_3(2,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $a_3$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Abhängige Achsen: $\mathfrak{A}_1(2,0)$ und $\mathfrak{A}_2(2,0)$ wie $\mathfrak{A}_3$ vom o-Punkt ausgehend; ihnen gleichartige $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ durch die Gegenecke. Die Nebenkanten tragen Achsen $\mathfrak{D}_h(2,0)$; durch den Mittelpunkt geht ein Kreuz von Schraubenachsen $\mathfrak{B}_h(2,1)$. (Fig. 62). Die Schraubenachsen $\mathfrak{B}_h$ bedingen

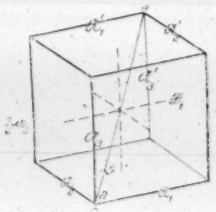


Fig. 62. Nr. 54.

eine Abweichung von dem vorigen Typ, die sich auch in dem Auftreten der mit den $\mathfrak{A}_h$ gleichartigen Achsen $\mathfrak{A}_h'$ ausdrückt und in Beziehung steht zu der Deckschiebung $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Der Atomaufbau ist in diesem Fall gegeben durch Zwölfpunkter in den Knotenpunkten eines zentrierten kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken $a_h$; die Gegenecke zum Nullpunkt ist der erste jener zentrischen Knotenpunkte. (Sch. $\mathfrak{T}^2$).

Nr. 54$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{A}_h$ oder $\mathfrak{A}_h'$. (Sch. $\mathfrak{T}^1_h$.)

1) Die Nr. 54 und 55 sind gegenüber den Sohnckeschen vertauscht, um Parallelismus zur folgenden Klasse zu erzielen.

Nr. 54$\beta$. Spiegelebene

a) durch eine Achse $\mathfrak{A}_h$ und $\mathfrak{D}(3,0)$. (Sch. $\mathfrak{T}^3_d$.)

Das Achsensystem von Nr. 8, $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{C}_e(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$ bildet nach Fig. 25 Zellen mit den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{4}c$, bei denen in zwei Gegenecken je drei zweizählige Drehachsen zusammentreffen, die also durch die Verfügung $a = b = \frac{1}{2}c$ und Zufügung einer dreizähligen Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ in der bezüglichen Diagonale regulären Charakter erhalten. Da $c$ und $2a$, $2b$ Deckschiebungen von Nr. 25 sind, so entspricht eine Zelle von den Kanten $a$, $b$, $\frac{1}{2}c$ dem Achtelwürfel und es ist $a$ mit $\frac{1}{2}a_1$, $b$ mit $\frac{1}{2}a_2$, $c$ mit $a_3$ zu vertauschen.

## Nr. 55. Oktaedrisches Zwölfpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(2,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $a_3$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Abhängige Achsen: $\mathfrak{A}_1'(2,0)$, $\mathfrak{A}_2'(2,0)$, $\mathfrak{A}_3'(2,0)$ von der Gegenecke ausgehend, je durch die diagonale Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ gleichartig. In den Flächenmitten Schraubenachsen $\mathfrak{B}_h(2,1)$ und $\mathfrak{C}_h(2,1)$ durch das Würfelzentrum Drehachsen $\mathfrak{D}(2,0)$ (Fig. 63). Die hierin

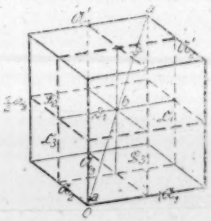


Fig. 63[1]). Nr. 55.

liegende Abweichung gegenüber Nr. 53 steht im Zusammenhang mit den geänderten Deckschiebungen. Der Aufbau besteht wieder aus nach den $a_h$ orientierten Zwölfpunktern, die sich jetzt aber um die Knotenpunkte eines flächenzentrierten kubischen Raumgitters mit den Grundstrecken $a_h$ gruppieren. (Sch. $\mathfrak{T}^2$.)

Nr. 55$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{A}_h$ oder $\mathfrak{A}_h'$; (Sch. $\mathfrak{T}^3_h$),

b) in der Mitte der Diagonalen zwischen zwei solchen Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{T}^1_{h'}$)

Nr. 55$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei gegenüberliegende Kanten,

1) In Fig. 63 ist durch ein Versehen die vertikale Hinterkante (rechts oben) gestrichelt statt ausgezogen.

zwischen denen eine dreizählige Achse verläuft. (Sch. $\mathfrak{T}_d^2$.)

Nr. 557. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathfrak{T}_d^5$.)

Das Achsensystem von Nr. 11, $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{S}_b(2,0)$, $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ zeigt nach Fig. 28 auf den drei Flächen des rechteckigen Prismas mit den Kanten $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ zyklisch sich genau entsprechende Bildung; man gelangt also durch die Spezialisierung $|\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}| = |\mathfrak{a}|$ wiederum direkt zu dem Achtelwürfel eines vierten Typs, bei dem nun keine Achse mehr durch eine Ecke geht. Wegen $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$ entspricht der ursprünglichen Deckschiebung $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ die neue $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$.

### Nr. 56. Reguläres zusammengesetztes Zweipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3'(2,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $a_3$, $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. Die Achse $\mathfrak{A}_3'$ liegt in der Mittellinie der Fläche $\frac{1}{2}a_2 \cdot \frac{1}{2}a_3$ durch den Nullpunkt, durch den auch die diagonale Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ geht. Mit $\mathfrak{A}_3'$ sind durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpft Achsen $\mathfrak{A}_1'(2,0)$, $\mathfrak{A}_2'(2,0)$; ebenso untereinander die in den Gegenflächen liegenden $\mathfrak{D}_1(2,0)$, $\mathfrak{D}_2(2,0)$, $\mathfrak{D}_3(2,0)$ (Fig. 64). Die komplizierte Anordnung der Atome innerhalb eines Vollwürfels läßt sich mit Hilfe der

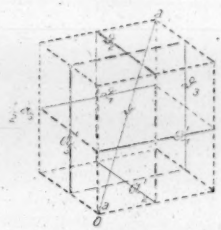


Fig. 64. (Nr. 56).

Fig. 60 für den Sohnckeschen regulären Zwölfpunkter einigermaßen veranschaulichen.

Die drei Achsen $\mathfrak{A}_h'$ tragen die Polpaare $\bullet \ldots \bullet$ (oder $\circ \ldots \circ$), die in Figur 60 den Richtungen $+\mathfrak{a}_h$ zugeordnet sind, die Achsen $\mathfrak{D}_h$ diejenigen von den Richtungen $-\mathfrak{a}_h$. Die auf $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$ liegenden Paare sind dabei miteinander durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpft, die auf $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{D}_1$ liegenden durch $\mathfrak{A}_3'$, die auf $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{D}_1'$ durch $\mathfrak{A}_1'$, die auf $\mathfrak{A}_3'$ und $\mathfrak{D}_3$ durch $\mathfrak{A}_2'$. (Sch. $\mathfrak{T}^5$.)

Nr. 56a. Spiegelpunkt

a) in einer Ecke des Achtelwürfels, dessen Flächen die zweizähligen Achsen tragen. (Sch. $\mathfrak{T}_h^7$.)

Nr. 567. Gleitspiegelebene

a) durch zwei gegenüberliegende Kanten des Achtelwürfels; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$. (Sch. $\mathfrak{T}_h^8$.)

Begrenzt man in Fig. 30, die dem Typ Nr. 13, $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{S}_a'(2,1)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ entspricht, das Prisma mit den Kanten $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ rechts und links nicht durch Ebenen $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{T}$, sondern durch Ebenen, die $\mathfrak{S}_a'$ enthalten, so trägt dies Prisma ein System Schraubenachsen, die sich für die drei Flächenpaare zyklisch entsprechen. Die Verfügung $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}| = |\mathfrak{c}|$ gibt daraus unmittelbar den Achtelwürfel des letzten Typs dieser Abteilung.

### Nr. 57. Reguläres abwechselndes Zweipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3'(2,1)$, $\mathfrak{T}(3,0)$, $a_3$. Die Achse $\mathfrak{A}_3'$ fällt nicht in eine Kante, sondern in die Mittellinie einer Fläche $\frac{1}{2}a_1$, $\frac{1}{2}a_3$ des Achtelwürfels. Abhängige Achsen: die zu $\mathfrak{A}_3'$ parallele $\mathfrak{B}_1(2,1)$ auf der Gegenfläche, dazu die gemäß $\mathfrak{T}(3,0)$ ihnen entsprechenden auf den andern Flächenpaaren (Fig. 65). Um eine Vorstellung von dem

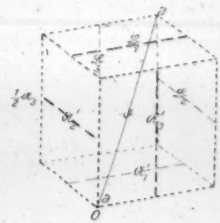


Fig. 65. Nr. 57.

Gesamtaufbau zu erhalten, beachte man, daß das Stück $\mathfrak{A}_1'$ innerhalb des gezeichneten Achtelwürfels durch die Achse $\mathfrak{A}_3'$ verknüpft ist mit einer Parallelen $\mathfrak{B}_1'$ die um $a_2$ vor $\mathfrak{B}_1$ nach vorn liegt und daß Analoges für $\mathfrak{A}_2'$ und $\mathfrak{A}_3'$ bezüglich paralleler $\mathfrak{B}_2'$ und $\mathfrak{B}_3'$ gilt. Nun liefert die Deckbewegung $\mathfrak{A}_1'(2,1)$ aus einem (etwa nahe dem linken Ende des gezeichneten $\mathfrak{A}_1'$ liegenden) Ausgangsatom ein verschränktes Paar im Abstand $\frac{1}{2}a_1$; ihm entspricht durch die Deckbewegung $\mathfrak{A}_3'$ ein Paar auf $\mathfrak{B}_1'$, und durch $\mathfrak{T}(3,0)$ werden weitere Paare auf $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$ diesen zugeordnet. Dieser „Zwölfpunkter" ist nun bei allen Knotenpunkten eines leeren kubischen Raumgitters anzubringen. (Sch. $\mathfrak{T}^4$.)

Nr. 57$\alpha$. Spiegelpunkt

a) in einer Ecke des Achtelwürfels, dessen Oberfläche die zweizähligen Achsen trägt. (Sch. $\mathfrak{T}_h^6$.)

Von den Typen dieser Abteilung entsprechen Nr. 53—57 der kristallographischen Symmetrie $\{A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$, Nr. 53$\alpha$—57$\alpha$ der Symmetrie $\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$. Nr. 53$\beta$—55$\beta$ und Nr. 53$\gamma$ bis 56$\gamma$ der Symmetrie $\{E_{x,y}, A_z^2 \sim A_{x'}^2 \sim A_{z'}^2\}$, die mit $\{S_x, S_y\}$ äquivalent ist.

## Abteilung B. Vierzählige Achsen.

Wie die Abteilungen B der früheren Klassen aus denen A durch die Einführung von zweizähligen Querachsen zu den in den A allein vorhandenen Hauptachsen abgeleitet wurden, so läßt sich der Übergang von den Scharen orthogonaler zweizähliger zu solchen vierzähliger Achsen ebenfalls durch Hinzunahme von weiteren zweizähligen Achsen zu den ersteren ausführen, die in mancher Hinsicht den früheren Querachsen analog auftreten, insbesondere natürlich auch bezüglich Lage und Art denselben Bedingungen genügen müssen, durch ihre Deckbewegungen vorhandene Achsen nur in die Lagen gleichartiger zu bringen. Die Möglichkeit, durch Einfügung neuer zweizähliger Achsen vorhandene zweizählige zu vierzähligen zu machen, beruht wesentlich auf dem unschwer zu beweisenden Satz, daß die Kombination zweier zweizähliger Drehachsen $\mathfrak{A}(2,0)$ und $\mathfrak{B}(2,0)$, die einen Winkel $2\pi/m$ einschließen, das Auftreten einer Schraubenachse $\mathfrak{L}$ im gemeinsamen Lot $l$ beider Achsen bedingt, die bei einer Drehung $4\pi/m$ eine Schiebung $= 2l$ liefert, unter $l$ die Länge dieses Lotes verstanden. Ist also z. B. $m = 8$, d. h. schließen die beiden Achsen den Winkel $45^0$ ein, und ist das Lot $l = \frac{1}{4}c$, dann ist bei $90^0$ Drehung die Schiebung $= \frac{1}{2}c$, d. h. die resultierende Schraubenachse hat den Charakter $\mathfrak{L}(4,2)$. Ist $l = 0$, d. h. schneiden sich die beiden Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so kommt man zu einem Fall der Kristallographie, und die resultierende Achse ist $\mathfrak{L}(4,0)$. Hieraus ergibt sich, daß man die orthogonalen zweizähligen Drehachsen der Typen Nr. 53—57 zu vierzähligen Drehachsen machen kann, wenn man sie schneidende, zu vierzähligen Schraubenachsen, wenn man von ihnen um $\frac{1}{4}a$ oder $\frac{1}{2}a$ entfernte zweizählige Drehachsen hinzufügt, die mit den vorhandenen Winkel von $45^0$ einschließen. Für diese Querachsen sind hiermit die Richtungen der Flächendiagonalen der in den Fig. 61—65 dargestellten Achtelwürfel vorgeschrieben, und die Forderung, daß ihre Einführung keine neue Achsen bewirken darf, begrenzt die Möglichkeiten ihrer Lage für die Typen 53, 54, 55 auf solche durch eine Ecke oder durch das Zentrum des Würfels, für die Typen 56 und 57 auf solche durch die Punkte mitten zwischen Zentrum und Ecke auf einer dreizähligen Achse. So liefern Nr. 53, 55, 57 je zwei verschiedene, Nr. 54 und 56 je zwei gleichwertige Anordnungen, im ganzen also acht.

Dieser methodische Weg, den Schönflies eingeschlagen hat, gibt die Resultate vielleicht nicht so unmittelbar anschaulich, wie der zuvor von Sohncke benutzte, der deshalb hier bevorzugt werden soll. Sohncke geht von den Typen der Abteilung IV B aus, die vierzählige Hauptachsen und zweizählige Querachsen besitzen, und untersucht, in welchen Fällen man derartige Querachsen vierzählig machen kann, ohne das Hauptachsensystem dadurch zu stören. Allgemein gilt nämlich folgendes.

Eine Achse $\mathfrak{A}(4,0)$ oder $\mathfrak{A}(4,2)$ ist von selbst gleichzeitig auch zweizählige Drehachse $(2,0)$; für erstere ist das unmittelbar klar, für letztere ergibt es sich leicht, weil hier die Drehung um $180^0$ eine Schiebung verursacht, die Deckschiebung ist. Eine Achse $\mathfrak{A}(4,+1)$ gibt bei Drehung um $180^0$ dasselbe Resultat, wie eine Achse vom Charakter $(2,1)$. Hieraus folgt denn, daß ohne Störung des Vertikalachsensystems Querdrehachsen $\mathfrak{Q}(2,0)$ den Charakter $(4,0)$ oder $(4,2)$, Querschraubenachsen $\mathfrak{P}(2,1)$ den Charakter $(4,+1)$ beigelegt erhalten dürfen.

Es ergeben sich hiernach die folgenden allgemeinen Bedingungen für die Zulässigkeit der Erweiterung eines der Systeme aus Klasse IV Abteilung B zu einem solchen mit gekreuzten vierzähligen Achsen:

Das System der Querachsen $\mathfrak{Q}_a(2,0)$ und $\mathfrak{P}_a(2,1)$ bzw. $\mathfrak{Q}_b(2,0)$ und $\mathfrak{P}_b(2,1)$ muß durch Drehung oder Schraubung um eine zu a bzw. b parallele Achse bei geeigneter Spezialisierung der Länge c mit dem System der Vertikalachsen $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zur Deckung gebracht werden können, derart, daß die $\mathfrak{Q}_a(2,0)$ in zweizählige Drehachsen oder vierzählige Achsen von dem Charakter $(4,0)$ oder $(4,2)$, die $\mathfrak{P}(2,1)$ in zweizählige oder vierzählige Schraubenachsen, letztere von dem Charakter $(4,+1)$ und halber Schiebungsgröße, hineinfallen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so erhält man das gesuchte reguläre Achsensystem einfach dadurch, daß man in dem bezüglichen Typ aus IV B den Querachsen die Natur derjenigen Vertikalachsen beilegt, in welche sie bei der beschriebenen Deckoperation hineinfallen. Eine diagonale Drehachse $\mathfrak{D}(3,0)$ entsteht dann von selbst. Die Strukturformel des Ausgangstyps liefert bei angemessener Umdeutung unmittelbar die Strukturformel des neuen Typs.

Den obigen Bedingungen genügen nun von den Typen IV B die Nr. 33—39, darunter 33 und 34 auf zwei Weisen, so daß wiederum 8 neue Typen entstehen. Die folgende Entwicklung wird der Reihe nach an Nr. 35, 36, 33, 34, 37/38 anknüpfen, deren Achsensysteme in den Fig. 47, 48, 45, 46, 49 dargestellt sind. Sollen die Achsen $\mathfrak{L}_b$ und $\mathfrak{P}_b$ (parallel den Grundkanten der in jenen Figuren dargestellten Prismen) mit den Vertikalachsen zur Deckung gebracht werden, so kann man die Figuren ohne weiteres benutzen, indem man nur die Höhendimension (also c) nach Bedürfnis verändert, um zur Würfelform zu gelangen. Bei Verwertung der Achsen $\mathfrak{L}_a$ und $\mathfrak{P}_a$ (parallel den Diagonalen der Grundfläche) verfährt man am besten so, daß man die in den Figuren dargestellten Prismen nach den vier Seitenflächen so weit fortgesetzt denkt, daß ein Prisma zwischen vier Vertikalachsen $\mathfrak{C}$ entsteht mit Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Mittellinien der Seitenflächen, dies vergrößerte Prisma durch die geforderte Veränderung der Höhe zum Würfel macht und dann die Deckung der Quer- in die Vertikalachsen vornimmt. Nach diesen allgemeinen Regeln ist es leicht, die neuen regulären Typen zu erhalten. Ihre figürliche Darstellung geschieht durch Wiedergabe eines Achtelwürfels, durch dessen vordere untere Ecke eine Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ geht. Die Wiedergabe der Achsen ist die frühere. (—— Drehachsen (2,0) oder (4,0), – – – Schraubachsen (2,1), – · – · Schraubachsen (4,1), —··— Schraubachsen (4,2).) Im Interesse der Übersichtlichkeit beschränken sich die Figuren auf die Darstellung der zu den Kanten des Achtelwürfels parallelen Achsen.

Die Strukturformel $\mathfrak{P}_1(4,0)$, $\mathfrak{P}_2(4,0)$ stellt (und zwar ohne Zuhilfenahme von $\mathfrak{P}_3(4,0)$ oder $\mathfrak{D}(3,0)$) ein System von 24 Atomen dar, die gegeneinander liegen wie die Flächenpole eines Pentagonikositetraeders. Dies System nennt Sohncke den regulären „Vierundzwanzigpunkter". Er spielt in dieser Abteilung die analoge Rolle wie der Zwölfpunkter in der vorigen.

Fig. 66, die (wie 60) als stereographische Projektion der beiden Halbkugeln zu verstehen ist, gibt in den ● und ○ die beiden enantiomorphen Formen dieses Punktsystems. Tritt ein im Kugelmittelpunkt liegender Spiegelpunkt hinzu, so entsteht der aus den ● und ○ zusammengesetzte zentrische Achtundvierzigpunkter. Liegt ein Spiegelpunkt außerhalb, so entstehen beide Formen in korrespondierenden Lagen.

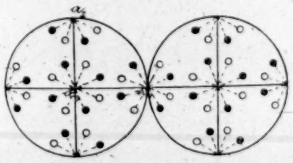


Fig. 66.

Wir gehen nun zu den einzelnen Typen über. Bei Nr. 35, $\mathfrak{A}(4,0)$, $\mathfrak{L}_b(2,0)$, $a$, $c$, lassen sich gemäß Fig. 47, wenn man das dargestellte Prisma nach Obigem zu einem solchen mit den Grundkanten $a$ erweitert und (das Doppelte der gezeichneten Höhe) $c = a$ macht, durch eine Drehung um die Mittellinie $a$ der horizontalen Grundfläche die Querachsen $\mathfrak{L}_a$ mit den Vertikalachsen in verlangter Weise zur Deckung bringen. Das Prisma liefert direkt die Hälfte des Vollwürfels des neuen Typs, dessen Kanten statt $a$ und $c$ wieder $a_h$ heißen mögen; daraus folgen für die Deckschiebungen die Beträge $a_h$.

### Nr. 58. Kubisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{P}_3(4,0)$, $\mathfrak{T}(3,0)$, $a_3$. Der Aufbau besteht aus Vierundzwanzigpunktern, deren Zentren in den Knotenpunkten eines (leeren) Würfelgitters mit den Grundstrecken $a_h$, liegen, und deren Achsen in die $a_h$ fallen. Alle Kanten des Achtelwürfels tragen Drehachsen; die durch den o Punkt gehenden entsprechen $\mathfrak{A}(4,0)$, die durch

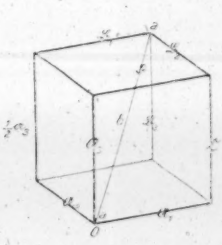


Fig. 67. Nr. 58.

die Gegenecke $\mathfrak{B}(4,0)$, die Zwischenkanten $\mathfrak{C}(2,0)$ (Fig. 67). (Sch. $\mathfrak{L}^1$.)

Nr. 58a. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{A}_h$ oder $\mathfrak{B}_h$; (Sch. $\mathfrak{L}_h^1$),

b) im Mittelpunkt der zwei solche Schnittpunkte verbindenden Diagonale. (Sch. $\mathfrak{L}_h^2$.)

Fig. 48, die sich auf den Typ. Nr. 36 mit $\mathfrak{A}(4,0)$, $\mathfrak{B}(4,2)$, $\mathfrak{C}(2,1)$ $\mathfrak{L}_a(2,0)$ bezieht, läßt erkennen, daß aus diesem Typ zwei reguläre zu gewinnen sind. Das System der (von links nach rechts gerichteten) Querachsen $\mathfrak{L}_b(2,0)$ und $\mathfrak{P}_b(2,1)$ läßt sich durch Drehung um die horizontale, von hinten nach vorn gehende, Mittellinie des Prismas mit den Vertikalachsen in richtiger

Weise zur Deckung bringen, wenn $\frac{1}{2}\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$. Das Prisma in der Figur wird durch $\mathfrak{d}_h = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_h$ zum Achtelwürfel des neuen Typs; die Deckschiebungen, $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}$ nehmen wegen $\mathfrak{a} = \mathfrak{d}_1 + \mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_3$ die Form $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)$ und $\mathfrak{a}_3$ an. Sonach ergibt sich der neue Typ

### Nr. 59. Rhombendodekaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\mathfrak{a}_3$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)$. Die Anordnung besteht aus Vierundzwanzigpunktern, mit den Zentren in den Knotenpunkten eines zentrierten Würfelgitters von den Grundstrecken $\mathfrak{a}_h$.

Der Achtelwürfel trägt in den je drei durch zwei gegenüberliegende Ecken gehenden Kanten Achsen $\mathfrak{A}_h(4,0)$, in den übrigen Kanten $\mathfrak{B}_h(4,2)$. Die Verbindungslinien der Zentren gegenüber-

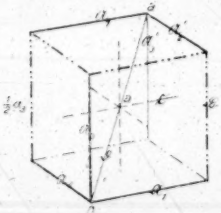


Fig. 68. Nr. 59.

liegender Flächen sind Achsen $\mathfrak{C}_h(2,1)$ (Fig. 68). (Sch. $\mathfrak{L}^5$).

Nr. 59a. Spiegelpunkt

a) in einer ausgezeichneten Ecke; oder im Mittelpunkt des Achtelwürfels. (Sch. $\mathfrak{L}^9_h$.)

Zu dem zweiten aus Nr. 36 zu gewinnenden regulären Typ gelangt man von dem nach S. 451 erweiterten Parallelepipedon in Fig. 48. Im Falle $\frac{1}{2}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ läßt sich das System der Querachsen $\mathfrak{L}_\mathfrak{a}(2,0)$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{a}(2,1)$ durch eine Drehung um die zu $\mathfrak{a}$ parallele Achse durch das Zentrum

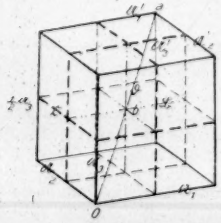


Fig. 69. Nr. 60.

der Mittelfläche in verlangter Weise mit den Vertikalachsen zur Deckung bringen.

Das erweiterte Prisma der Fig. 48 wird zum Achtelwürfel des neuen Typs, der (bei einer um $\frac{1}{2}\mathfrak{a} + \frac{1}{4}\mathfrak{c}$ gegen Fig. 48 verschobenen Begrenzung) sich in der durch Fig. 69 wiedergegebenen regulären Form darstellt. Die Deckschiebungen $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ gewinnen bei Benutzung der Beziehungen $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a} = \frac{1}{2}\mathfrak{a}_1$ zu den Kanten $\mathfrak{a}_h$ des Vollwürfels sogleich die neue Form.

### Nr. 60. Oktaedrisches Vierundzwanzigpunktersystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,0)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3)$, $\mathfrak{a}_3$. Alle Kanten des Achsenwürfels tragen Achsen vom Typ $\mathfrak{A}(4,0)$, die Mittellinien der Flächen solche vom Typ $\mathfrak{C}(2,1)$, das Achsenkreuz durch den Mittelpunkt solche $\mathfrak{B}(4,2)$. Der Aufbau läßt sich auffassen als bestehend aus regulären Vierundzwanzigpunktern, mit ihren Mittelpunkten in den Knotenpunkten eines flächenzentrierten kubischen Raumgitters von den Grundstrecken $\mathfrak{a}_h$ liegend, mit ihren Achsen nach den $\mathfrak{a}_h$ orientiert. (Sch. $\mathfrak{L}^3$).

Nr. 60a. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt von drei Achsen $\mathfrak{A}_h(4,0)$ (Sch. $\mathfrak{L}^3_h$),

b) im Schnittpunkt von drei Achsen $\mathfrak{B}_h(4,2)$. (Sch. $\mathfrak{L}^4_h$).

Auch der Typ Nr. 33 mit $\mathfrak{A}(4,+1)$, $\mathfrak{B}(4,+1)$, $\mathfrak{C}(2,0)$ kann auf zwei Weisen so umgestaltet werden, daß zwei (bzw. drei) zueinander normale Scharen vierzähliger Achsen entstehen. Dreht man nämlich in Fig. 45 das System der Querachsen um die zu $\mathfrak{d}$ parallele Mittellinie $\mathfrak{P}_\mathfrak{b}$ des Prismas unter rechtslinker Schiebung um $\frac{1}{2}\mathfrak{d}$, so fallen die Querdreh- und -schraubenachsen $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{P}_\mathfrak{b}$ in vertikale Dreh- und Schraubenachsen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, falls nur $\frac{1}{2}\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$. Begrenzt man weiter das Gebiet vorn und hinten, statt wie in Fig. 45 durch Ebenen durch $\mathfrak{AB}$, durch solche, die Achsen $\mathfrak{C}$ enthalten, so gelangt man zu dem System vierzähliger Dreh- und Schraubenachsen, wie es Fig. 70 darstellt. Aus den Deck-

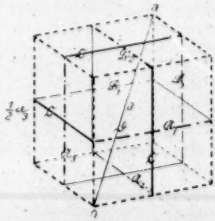


Fig. 70. Nr. 61.

schiebungen $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ von Nr. 33 werden bei Einführung der Kanten $\mathfrak{a}_h$ des Vollwürfels jetzt $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)$ und $\mathfrak{a}_3$.

### Nr. 61. Reguläres Gegenschraubensystem erster Art.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,\pm 1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\mathfrak{a}_3$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{a}_3)$: Die Achse $\mathfrak{A}_3(4,+1)$ ist um $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$ vom o-Punkt entfernt, die $\mathfrak{B}_2$, $(4,+1)$ um $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 + \frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$. Dazu kommen Achsen $\mathfrak{C}_1(2,0)$ normal zu $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ in den Mittellinien der Würfelflächen. Die übrigen Achsen folgen daraus gemäß $\mathfrak{D}(3,0)$. Eine zweite Achsenverteilung mit den Abständen $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 + \frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$ für $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{B}_3$ ist nur in der Aufstellung verschieden. Ein Drehungssinn ist nicht vorhanden. Das elementare Atomsystem besteht (wegen der die $\mathfrak{A}_h$ schneidenden Achsen $\mathfrak{C}_h(2,0)$) aus drei durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpften, zusammengesetzten einfach gewundenen Vierpunktern (vom Typ Fig. 42) auf den Achsen $\mathfrak{A}_h$. Dieser „Vierundzwanzigpunkter" wiederholt sich bei allen Knotenpunkten eines zentrierten kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{D}^8$.)

Nr. 61 a. Spiegelpunkt

a) in einer Ecke oder im Mittelpunkt des Würfels, dessen Flächen die sämtlichen Achsen tragen. (Sch. $\mathfrak{D}_h^{10}$).

Ein zweiter Typ leitet sich aus Nr. 33 am einfachsten ab, wenn man das nach S. 451 erweiterte Prisma in Fig. 45 so begrenzt, daß die Grundflächen um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ unterhalb der in der Figur gezeichneten liegen. Dann lassen sich bei $\frac{1}{2}\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ die Querachsen $\mathfrak{D}_3(2,0)$ und $\mathfrak{P}_3(2,1)$ durch Drehung um eine zu $\mathfrak{a}$ parallele Mittellinie mit den Vertikalachsen $\mathfrak{C}(2,0)$ und $\mathfrak{A}(4,\pm 1)$, $\mathfrak{B}(4,+1)$ zur Deckung bringen. Hieraus folgt eine Achsenverteilung, die für einen Achtelwürfel mit Drehachsen in den Kanten durch Fig. 71 dargestellt wird. Die Deckbewegung

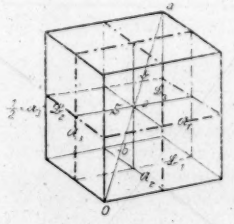


Fig. 71. Nr. 62.

$\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}$ wird, wenn man wieder die Kanten $\mathfrak{a}_h$ des Vollwürfels einführt, zu $\mathfrak{a}_1 + \frac{1}{2}\mathfrak{a}_3$, $\mathfrak{a}_3$.

### Nr. 62. Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,\pm 1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_3)$, $\mathfrak{a}_3$. Die Achse $\mathfrak{A}_3(4,\pm 1)$ liegt wieder um $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$ (oder $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$), die $\mathfrak{B}_3(4,+1)$ um $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$ (oder $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$) vom o-Punkt; zu ihnen kommen parallele Achsen in den Gegenflächen des Achtelwürfels. Endlich Drehachsen $\mathfrak{C}_3(2,0)$ in den bez. Würfelkanten und der Mittellinie. Die andern $\mathfrak{A}_h$ und $\mathfrak{B}_h$ folgen aus diesen durch $\mathfrak{D}(3,0)$. Das elementare Atomsystem ist dasselbe wie in Nr. 61; es wiederholt sich aber hier bei allen Knotenpunkten eines flächenzentrischen kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{D}^4$.)

Nr. 62 a. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Achsen $\mathfrak{C}(2,0)$; (Sch. $\mathfrak{D}_h^7$),

b) in der Mitte der Diagonale zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{D}_h^*$.)

Das Achsensystem des Typs Nr. 34 mit $\mathfrak{A}(4,2)$, $\mathfrak{B}(4,2)$, $\mathfrak{C}(2,0)$ in Fig. 46 führt mit Hilfe des nach S. 451 bis zu den benachbarten $\mathfrak{C}$-Achsen erweiterten Parallelepipeds zu einem weiteren regulären Typ. Bei $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ wird das System der $\mathfrak{D}_3$ mit den Vertikalachsen in verlangter Weise deckbar. Das Parallelepiped liefert

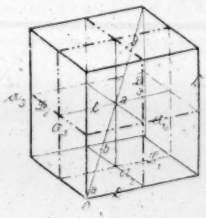


Fig. 72. Nr. 63.

hier den Vollwürfel (Fig. 72); die Deckbewegung $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ wird zu $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$.

### Nr. 63. Reguläres zweigängiges Vierpunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,2)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_3$. $\mathfrak{A}_3(4,2)$ im Abstand $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$ (oder $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$) vom Nullpunkt, $\mathfrak{B}_3(4,2)$ im Abstand $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_1$ (oder $\frac{1}{4}\mathfrak{a}_2$); dazu parallele gleichartige Achsen $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{B}_3'$ in den Gegenflächen; Achse $\mathfrak{C}_3(2,0)$ in der vertikalen Mittellinie des Würfels; die übrigen $\mathfrak{A}_h$, $\mathfrak{B}_h$ und $\mathfrak{C}_h$ mit diesen durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpft. Das elementare Atomsystem besteht aus zusammengesetzten doppeltgewundenen Vierpunktern vom Typ Fig. 42 um alle $\mathfrak{A}_h$ in zyklischer

Verknüpfung durch $\mathfrak{D}(3,0)$: dasselbe wiederholt sich für alle Knotenpunkte eines leeren kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{L}^2$.)

Nr. 63$\alpha$. Spiegelpunkt

a) in einem Schnittpunkt von $\mathfrak{D}(3,0)$ mit drei $\mathfrak{C}(2,0)$; (Sch. $\mathfrak{L}^3_h$),

b) in der Mitte der Diagonale zwischen zwei benachbarten Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{L}^4_h$.)

Das Querachsensystem von Nr. 37/38 mit $\mathfrak{A}(4,\pm 1)$, $\mathfrak{B}(4,\pm 1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$ in Fig. 49 enthält in der Ebene, die um $\frac{1}{2}c$ über der Grundfläche liegt, Querschraubenachsen $\mathfrak{P}_2(2,1)$ im gegenseitigen Abstand $\frac{1}{2}a$. Dasselbe System wiederholt sich um $\frac{1}{2}c$ darunter und darüber. Erweitert man die Konstruktion auf ein Prisma, das einerseits vier Achsen $\mathfrak{C}(2,0)$ im relativen Abstand $a$ zu Seitenkanten, andererseits die Querschnitte $-\frac{1}{2}c$ und $+\frac{1}{2}c$ zu Grundflächen hat, und macht dann $c = a$, so kann man durch Drehen um die in der Mittelfläche des erweiterten Prismas liegende, von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}$ verlaufende Diagonale und Schiebung um $\pm\frac{1}{2}a$ Querachsen $\mathfrak{P}_2(2,1)$ in alle Vertikalachsen bringen; die $\mathfrak{P}_2(2,1)$ können also auf zwei Weisen mit Achsen vom Charakter $(4,\pm 1)$ vertauscht werden. So entsteht ein Typ, für den das erweiterte Prisma den Vollwürfel liefert, und bei dem drei orthogonale Systeme Achsen von den Typen $\mathfrak{A}(4,\pm 1)$, $\mathfrak{B}(4,\pm 1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$ in Abständen $\frac{1}{2}a$ aneinander vorbeigehen. Das komplizierte Achsensystem ist in Fig. 73 durch

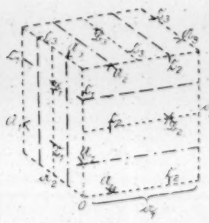


Fig. 73.

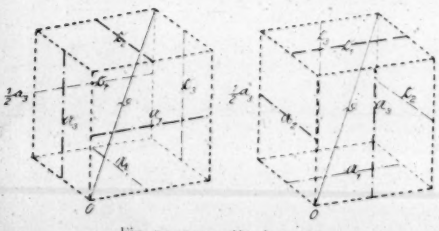


Fig. 74 u. 75. Nr. 64 u. 65.

Wiedergabe der Lagen von Achsen und von Schnittpunkten solcher in drei Flächen des Vollwürfels veranschaulicht. Das gesamte Achsensystem ist mit seinem Spiegelbild nicht zur Deckung zu bringen, so wenig wie die Achsen vom Typ $(4,+1)$ und $(4,-1)$. Fig. 74 und 75 geben die Achtelwürfel für die beiden enantiomorphen Ausbildungen wieder.

Nr. 64/65. **Rechtes und linkes reguläres Vierpunktschraubensystem.**

Formel: $\mathfrak{A}_3(4,+1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$, $a_1$, $a_3$. Der elementare Atomaufbau besteht aus einfach gewundenen Vierpunktern um die Achsen $\mathfrak{A}_h$, die untereinander durch $\mathfrak{D}(3,0)$ und mit ähnlichen um die Achsen $\mathfrak{B}_h$ durch die zu beiden normalen $\mathfrak{C}_h$ verknüpft sind. Dieses System von $6\times 4 = 24$ Atomen wiederholt sich bei allen Knotenpunkten eines leeren kubischen Raumgitters. (Sch. $\mathfrak{L}^6$ und $\mathfrak{L}^7$.)

## § 10. Gruppierung nach kristallographischen Symmetrien.

Wie schon angekündigt, sollen die im vorstehenden an die Sohnckeschen 65 Typen angeschlossenen 230 Strukturen nun den 32 kristallographischen Gruppen eingeordnet werden; dabei mögen — was für die Anwendung vorteilhaft ist — Unterabteilungen gemäß dem Charakter der Deckschiebungen oder (was nach § 5 dasselbe ist) nach dem Charakter des ihnen entsprechenden Bravaisschen Raumgitters eingeführt werden. Die Symbole $\Gamma$ für diese letzteren sind die nach S. 241 von Schönflies vorgeschlagenen.

I. Triklines System.

1. Holoedrie $\{C\}$.
   $\Gamma_t$: Nr. 1$\alpha$.
2. Hemiedrie $\{O\}$.
   $\Gamma_t$: Nr. 1.

II. Monoklines System.

3. Holoedrie $\{C, A^2_z$ oder $C, E_z\}$.
   $\Gamma_m$: Nr. 2$\alpha$, a und b; Nr. 3$\alpha$, a und b.
   $\Gamma_m'$: Nr. 4$\alpha$, a und b.
4. Hemiedrie $\{E_z\}$.
   $\Gamma_m$: Nr. 1$'\beta$, a; Nr. 1$'\gamma$ a; $\Gamma_m'$: Nr. 1$''\beta$, a; Nr. 1$''\gamma$, a.
5. Hemimorphie $\{A^2_z\}$.
   $\Gamma_m$: Nr. 2 und 3; $\Gamma_m'$: Nr. 4.

III. Rhombisches System.

6. Holoedrie $\{C, A^2_z, A^2_x$ oder $C, A^2_z, E_x\}$.
   $\Gamma_v$: Nr. 5$\alpha$, a, b, c und d; Nr. 6$\alpha$, a, b, c und d; Nr. 12$\alpha$, a, b, c, d, e und f; Nr. 13$\alpha$, a und b.
   $\Gamma_v'$: Nr. 7$\alpha$, a, b, c und d; Nr. 9$\alpha$, a und b.

$\Gamma_v''$: Nr. 8$\alpha$, a und b; $\Gamma_v'''$: Nr. 10$\alpha$, a und b; Nr. 11$\alpha$, a und b.

7. Hemiedrie $\{A_x^2,\ A_{x'}^2\}$.
$\Gamma_v$: Nr. 5, 6, 12, 13; $\Gamma_v'$: Nr. 7, 9; $\Gamma_v''$: Nr. 8; $\Gamma_v'''$: Nr. 10, 11.

8. Hemimorphie $\{A_x^2,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_v$: Nr. 2′$\beta$, a und b; Nr. 2′$\gamma$, a, b, c, d; Nr. 3′$\beta$, a und b; Nr. 3′$\gamma$, a und b.
$\Gamma_v'$: Nr. 2″$\beta$, a; Nr. 2″$\gamma$, a; Nr. 3′$\beta$, a; Nr. 4′$\beta$, a und b; Nr. 4′$\gamma$, a und b.
$\Gamma_v''$: Nr. 4″$\beta$, a; Nr. 4‴$\gamma$, a; $\Gamma_v'''$: Nr. 4‴$\beta$, a und b; Nr. 4″″$\gamma$, a und b.

IV. Trigonales System.

9. Holoedrie $\{C,\ A_v^3,\ A_x^2$ oder $C,\ A_v^3,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 20$\alpha$, a und b; Nr. 24$\alpha$, a und b.
$\Gamma_{rh}$: Nr. 21$\alpha$, a und b.

10. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_v^3,\ A_x^2\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 18/19, 20, 22/23, 24; $\Gamma_{rh}$: Nr. 21.

11. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_v^3,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 16$\beta$, a und b; Nr. 16$\gamma$, a und b.
$\Gamma_{rh}$: Nr. 17$\beta$, a; Nr. 17$\gamma$, a.

12. Paramorphe Hemiedrie $\{C,\ A_{v'}^3\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 16$\alpha$, a; $\Gamma_{rh}$: Nr. 17$\alpha$, a.

13. Tetartoedrie $\{A_{v'}^3\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 14/15, 16; $\Gamma_{rh}$: Nr. 17.

V. Tetragonales System.

14. Holoedrie $\{C,\ A_v^4,\ A_x^2$ oder $C,\ A_v^4,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 34$\alpha$, a, b, c, d; Nr. 35$\alpha$, a, b, c, d; Nr. 39$\alpha$, a, b, c, d; Nr. 40$\alpha$, a, b, c, d.
$\Gamma_q'$: Nr. 33$\alpha$, a und b; Nr. 36$\alpha$, a und b.

15. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_v^4,\ A_{x'}^2\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 31/32, 34, 35, 37/38, 39, 40.
$\Gamma_q''$: Nr. 33, 36.

16. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_v^4,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 28$\beta$, a und b; Nr. 28$\gamma$, a und b; Nr. 29$\beta$, a und b; Nr. 29$\gamma$, a und b.
$\Gamma_q'$: Nr. 27$\beta$, a; Nr. 27$\gamma$, a; Nr. 30$\beta$ a; Nr. 30$\gamma$, a.

17. Paramorphe Hemiedrie $\{C,\ A_{v'}^4\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 28$\alpha$, a und b; Nr. 29$\alpha$, a und b.
$\Gamma_q'$: Nr. 27$\alpha$, a; Nr. 30$\alpha$ a.

18. Tetartoedrie $\{A_{v'}^4\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 25/26, 28, 29; $\Gamma_q'$: Nr. 27, 30.

19. Hemiedrie mit Spiegelachse $\{S,\ A_v^2$ oder $A_v^2,\ A_x^2,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_q$: Nr. 5′$\beta$, a; Nr. 5′$\gamma$, a; Nr. 7′$\beta$, a; Nr. 7′$\gamma$, a, b, c; Nr. 12′$\beta$, a; Nr. 12′$\gamma$, a.
$\Gamma_q'$: Nr. 8′$\beta$, a; Nr. 8′$\gamma$, a; Nr. 10′$\beta$, a; Nr. 11′$\gamma$, a.

Tetartoedrie mit Spiegelachse $\{S_z\}$.
$\Gamma_q$: r. 2‴$\delta$, a; $\Gamma_q'$: Nr. 4″″$\delta$, a.

VI. Hexagonales System.

21. Holoedrie $\{C,\ A_v^6,\ A_x^2$ oder $C,\ A_v^6,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 51$\alpha$, a und b; Nr. 52$\alpha$, a und b.

22. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_v^6,\ A_{x'}^2\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 47/48, 49/50, 51, 52.

23. Hemimorphe Hemiedrie $\{A_v^6,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 45$\beta$, a und b; Nr. 46$\beta$, a; Nr. 46$\gamma$, a.

24. Paramorphe Hemiedrie $\{C,\ A_{v'}^6\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 45$\alpha$, a; Nr. 46$\alpha$ a.

25. Tetartoedrie $\{A_{v'}^6\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 41/42, 43/44, 45, 46.

26. Hemiedrie mit dreizähliger Hauptachse $\{A_v^3,\ A_x^2,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 20$\beta$, a und b; Nr. 24$\beta$, a und b.

27. Tetartoedrie mit dreizähliger Hauptachse $\{A_v^3,\ E_{x'}\}$.
$\Gamma_h$: Nr. 16$\beta$ c.

VII. Reguläres System.

28. Holoedrie $\{C,\ A_v^4,\ A_{x'}^4\}$.
$\Gamma_c$: Nr. 58$\alpha$, a und b; Nr. 63$\alpha$, a und b.
$\Gamma_c'$: Nr. 60$\alpha$, a und b; Nr. 62$\alpha$, a und b.
$\Gamma_c''$: Nr. 59$\alpha$, a; Nr. 61$\alpha$, a.

29. Enantiomorphe Hemiedrie $\{A_v^4,\ A_{y'}^4\}$.
$\Gamma_c$: Nr. 58, 63, 64/65; $\Gamma_c'$: Nr. 60, 62.
$\Gamma_c''$: Nr. 59, 61.

30. Hemimorphe Hemiedrie $\{S_x,\ S_y$ oder $E_{x'},\ A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_{z'}^2\}$.
$\Gamma_c$: Nr. 53$\beta$, a; Nr. 53$\gamma$, a.
$\Gamma_c'$: Nr. 55$\beta$, a; Nr. 55$\gamma$, a.
$\Gamma_c''$: Nr. 54$\beta$, a; Nr. 56$\gamma$, a.

31. Paramorphe Hemiedrie $\{C,\ A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_{z'}^2\}$.
$\Gamma_c$: Nr. 53$\alpha$, a und b; Nr. 57$\alpha$, a.
$\Gamma_c'$: Nr. 55$\alpha$, a und b.
$\Gamma_c''$: Nr. 54$\alpha$, a; Nr. 56$\alpha$, a.

32. Tetartoedrie $\{A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_{z'}^2\}$.
$\Gamma_c$: Nr. 53, 57; $\Gamma_c'$: Nr. 55.
$\Gamma_c''$: Nr. 54, 56.

## § 11. Allgemeine Gesichtspunkte für die Vergleichung beobachteter Strukturen mit der Theorie.

In den folgenden Abschnitten sollen einige Anwendungen der im vorstehenden zusammengestellten Resultate der Strukturtheorie gemacht werden. Es handelt sich darum, einmal beobachtete Strukturen mit den theoretischen Typen zu vergleichen und ihnen einzuordnen, sodann diese Vergleichung zu Schlüssen über die Symmetrie der Atome zu benutzen.

In bezug auf ersteres mag daran erinnert werden, daß in der Zusammenstellung des

vorigen Paragraphen jeder der 32 kristallographischen Gruppen diejenigen Strukturtypen zugeordnet sind, die bei beliebiger Symmetrie der einzelnen Atome, bei beliebiger Lage und Orientierung des Ausgangsatoms gegen die Dreh- und Schraubenachsen die Symmetrien der Kristallgruppe besitzen. Es können aber Repräsentanten der höher symmetrischen Kristalle auch Atomanordnungen von im allgemeinen niedrigerer Symmetrie aufweisen, die durch spezielle Bildung, Lage und Orientierung der Atome diejenige spezielle Ausgestaltung erhalten haben, die sie mit der höher symmetrischen Kristallgruppe vereinbar machen. Die in der vorstehenden Zusammenstellung den 32 Gruppen zugeteilten Strukturen sind also keineswegs die einzigen ihnen entsprechenden. Zur Deutung des beobachteten Atomaufbaues eines holoedrischen Kristalles wird man daher z. B. auch die gewissen hemiedrischen Formen des Systems entsprechenden Strukturtypen heranziehen dürfen, die bei spezieller Ausbildung mit der holoedrischen Symmetrie verträglich sind. Es wird auch gelegentlich eine Mehrdeutigkeit vorliegen, insofern mehrere Strukturtypen durch Spezialisierungen mit der beobachteten Anordnung zur Übereinstimmung gelangen können. Dies wird besonders dann stattfinden, wenn in Wirklichkeit die Anzahl der Atome des Elementarbereichs (wie oft stattfindet) beträchtlich kleiner ist, als die nach den Symmetrieelementen bei beliebiger Lage des Ausgangsatoms abzuleitende, von den theoretischen Atomen also eine größere Zahl zusammenfällt. Welchen von mehreren mit der Beobachtung vereinbaren Typen man schließlich zur Deutung heranziehen wird, ist bis zu einem gewissen Grade Geschmacksache. Im folgenden werden die Sohnckeschen Typen, die nur Deckoperationen erster Art zulassen, in den Vordergrund gestellt und gezeigt, daß man mit denselben gegenüber der erdrückenden Mehrzahl der beobachteten Strukturen auskommt. Die Tatsache, daß eine Anordnung eine Deckoperation zweiter Art zuläßt, ist keineswegs ein Beweis dafür, daß diese Operation zur Ableitung der Struktur aus einem Ausgangsatom nötig ist. Wenn z. B. die von Bragg angegebene Struktur des Diamants als ein überzeugender Beweis für die Notwendigkeit der erweiterten Strukturtheorie hingestellt wird, so liegt dem ein Irrtum zugrunde: die Struktur läßt sich glatt unter einen der Sohnckeschen Typen ordnen.

Da diese Typen die möglichst einfachen sind, so bedeutet ihr Überwiegen auch eine Vereinfachung der Betrachtung. Und wenn geltend gemacht werden sollte, daß bei ihrer Anwendung auf Strukturen mit Spiegelungen den Eigensymmetrien der Atome eine wesentliche Rolle zufällt, so ist demgegenüber zu bemerken, daß die erweiterte Theorie doch sehr ähnlich verfährt, indem sie für dasselbe Element entweder zwei Arten von Atomen in sich spiegelbildlich entsprechender Ausbildung, oder aber eine Art mit spiegelbildlicher Eigensymmetrie voraussetzt. —

Bei der Vergleichung einer beobachteten Struktur mit den theoretischen Typen ist natürlich wohl darauf zu achten, daß je nach der Lage des Ausgangsatoms die demselben Typ entsprechenden Anordnungen sich recht verschiedenartig darstellen können. So können für spezielle Lagen des Ausgangsatoms Typen von enantiomorpher Natur diesen Charakter verlieren, und umgekehrt Typen ohne prinzipiellen Drehungssinn, d. h. mit gleichviel und gleichartigen + - und — -Achsen, die Bevorzugung einer Rotationsrichtung zeigen.

Bei Typen, die nebeneinander parallele Schrauben- und Drehungsachsen aufweisen, kann je nach der Lage des Ausgangsatoms der eine oder der andere Charakter dominierend werden.

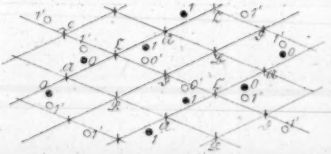


Fig. 76.

Fig. 76 gibt als Beispiel hierfür die Atomanordnung zu Nr. 11 $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{L}(2,0)$ bei gleichzeitigen $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,0)$. Die schwarzen Punkte entsprechen der Strukturformel ohne Querachse $\mathfrak{L}$, die leeren Kreise geben das durch die Querachse Hinzutretende. Absichtlich sind in der Figur die Atome etwa in die Mitte zwischen die Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ (bzw. $\mathfrak{D}$) gelegt. Rückt man sie nahe an $\mathfrak{A}$, dann erscheint der Aufbau als aus Atompaaren des Typs (Fig. 5′) um die Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bestehend; rückt man sie näher an $\mathfrak{C}$, dann aus Vierpunktern von der Art (Fig. 8′) um die Achsen $\mathfrak{C}$, und zwar in zwei spiegelbildlichen Ausbildungen. Diese Beispiele weisen darauf hin, daß bei Einordnung einer durch die Beobachtung gelieferten Struktur in die Reihe der 230 Typen einige Vorsicht geübt werden muß. —

Was nun zweitens die Schlüsse angeht, die aus der Vergleichung beobachteter Strukturen mit theoretischen über die Symmetrie der einzelnen Atome gewonnen werden können, so ist dazu allgemein folgendes zu sagen.

Fällt eine beobachtete Struktur mit einer theoretischen in der Weise zusammen, daß erstere für das Elementargebiet die theoretische Maximalzahl der (mit Hilfe der Deckoperationen des Typs aus einem Ausgangsatom abzuleitenden) Atome aufweist, so gestattet ein solcher Befund keinerlei Schlüsse über die Symmetrie der wirklichen Atome. Einzig die relative Orientierung dieser Atome läßt sich dann aus dem theoretischen Typ feststellen. Ist die beobachtete Struktur aber eine Ausartung einer theoretischen, in dem Sinne, daß erstere durch das (natürlich mit den Symmetrieelementen vereinbare) Zusammenrücken mehrerer „theoretischer" Atome aus der letzteren hervorgeht, so eignet dem wirklichen Atom mindestens diejenige Symmetrie, welche der Komplex der zusammenrückenden theoretischen Atome besitzt. Weist z. B. der theoretische Typ eine $n$-zählige Drehachse auf, welche demgemäß ebene $n$-Punkter trägt, und zeigt der beobachtete Typ statt dessen auf der Achse ein einfaches Atom, so ist dieses als durch Zusammenrücken der Atome des $n$-Punkters entstanden zu betrachten und muß demgemäß eine $n$-zählige Symmetrieachse besitzen. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß das wirkliche Atom noch andere Symmetrieelemente besitzt, die etwa in andern Kristallen (an deren Aufbau das Atom beteiligt ist) zur Geltung kommen; — der einzelne Kristall liefert nur Auskunft über das Minimum von Elementen, das die spezielle Struktur verlangt.

Weiter kann u. U. die Gesamtsymmetrie des Kristalls eine Ergänzung der aus der Struktur zu gewinnenden Schlüsse verlangen. In dem oben erwähnten Fall einer $n$-zähligen Drehachse würde z. B. eine Symmetrie $(C, A_z^n)$ oder $(A_z^n, E_x)$ durch die bloße Annahme der $A_z^n$ für das Atom nicht erreichbar sein. Hier kommen jene Schlußweisen zur Anwendung, deren sich Sohncke (dem Beobachtungen über Strukturen nicht zur Verfügung standen) bedient hat.

## § 12. Diskussion der durch die Beobachtung erschlossenen Strukturen einiger regulärer Kristalle[1]).

Wie bereits oben angedeutet, findet sich die auffallende Kleinheit der wirklichen Atomzahlen eines Elementarbereichs, verglichen mit den theoretisch aus den Symmetrien folgenden besonders ausgeprägt bei gewissen Kristallen des regulären Systems. Bei den holoedrischen Kristallen von $Cu$, $Ag$, $Au$ besteht nach der Beobachtung die Struktur aus einem flächenzentrischen kubischen Gitter $I_c'$ mit je einem einfachen Atom in jedem Knotenpunkt; es steht also je ein Atom an Stelle der nach Symmetrie zu erwartenden Zahl von 48. Es ist unzweifelhaft das Natürlichste, diese Struktur als eine Ausartung der Sohnckeschen Nr. 55 oder 60 aufzufassen, bei der der Zwölf- bzw. Vierundzwänzigpunkter die Symmetrie der regulären Holoedrie $(C, A_x^4, A_{yl}^4)$ hat und zu einem ein zigen Atom zusammengeschrumpft ist. —

Bei einer Anzahl von binären Verbindungen[1]) — repräsentiert durch $NaCl$ und $KCl$ —, die regulär holoedrisch oder enantiomorph hemiedrisch kristallisieren, bildet nach der Beobachtung jede Atomgattung ein flächenzentrisches Raumgitter $I_c'$, doch so, daß das eine gegen das andere um $\frac{1}{2}a_i$ verschoben ist. Das Auffallendste an diesem Ergebnis ist, daß dieselbe Struktur für die zwei wesentlich verschiedenen kristallographischen Symmetrien — $(C, A_x^2, A_{yl}^4)$ und $(A_x^2, A_{yl}^4$ — gefunden wurde. Den ersten Fall $(NaCl)$ kann man auf den soeben besprochenen der Elemente $Cu$, $Ag$, $Au$ bis zu einem gewissen Grade zurückführen; die Sohnckeschen Typen Nr. 55 und 60 geben in der Tat bei einem Ausgangsatom in einer Würfelecke direkt das flächenzentrische kubische Gitter in der Normallage, bei einem solchen in einer Kantenmitte aber ein ebensolches Gitter in der verschobenen Lage. Man muß dann nur sowohl dem $Na$- wie dem $Cl$-Atom die Symmetrie $(C, A_x^2, A_{yl}^4)$ beilegen, um eine mit der Holoedrie vereinbare Struktur zu erhalten. Dieses Verhältnis legt offenbar nahe den zweiten Fall $(KCl)$ analog aufzufassen, also, da die Symmetrie des $Cl$-Atoms nach dem Verhalten in $NaCl$ festliegt, dem $K$-Atom die Symmetrie $(A_x^2, A_{yl}^4)$ beizulegen, die mit den herangezogenen Sohnckeschen Typen vereinbar ist. Der andere Ausweg, für die hemiedrisch kristallisierenden Verbindungen die ganze Anordnung ein wenig von der für die holoedrischen nachgewiesenen $I_c'$ abweichend anzunehmen[2]), würde erst dann befriedigen, wenn eine solche Struktur (welche natürlich dieselbe Atomzahl haben müßte, wie oben vorausgesetzt) angegeben werden könnte, die ohne spezielle Annahme über die Symmetrie des $K$-Atoms der Formel $(A_x^2, A_{yl}^4)$ entspräche. Dies müßte aber, da diese Formel nur Deck-

1) Die meisten Feststellungen von Strukturen durch Röntgenstrahlanalyse verdankt man W. H. und W. L. Bragg, die eine Zusammenstellung ihrer Resultate in der Monographie *X-Rays and Crystal Structure*, London 1916 gegeben haben.

1) $NaCl$, $LiCl$, $PbS$, $KCl$, $KBr$, $KJ$, $RbCl$, $RbBr$, $RbJ$, $CsCl$, $CsBr$, $CsJ$. u. a.

2) Siehe W. H. und W. L. Bragg, l. c. S. 157.

operationen erster Art voraussetzt, die Struktur eines Sohnckeschen Typs sein; ich sehe nicht, daß einer von diesen den gestellten Anforderungen zu genügen vermag. Aber auch wenn letzteres zu ermöglichen wäre, so würde die von *NaCl* abweichende Struktur in letzter Instanz doch auf der von *Na* abweichenden Atomsymmetrie von *K* beruhen; — es erscheint da doch eigentlich einfacher, eben diese Abweichung unter Beibehaltung des Raumgitters $\Gamma'$ zur Erklärung zu benutzen. —

Das Braggsche Atomsystem für den regulär kristallisierenden Diamant (und Silizium) wird meist beschrieben als bestehend aus zwei identischen, mit C-Atomen besetzten Raumgittern $\Gamma''$, die um $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)$ gegeneinander verschoben sind; damit ist es also aus zwei verschiedenen Ausgangsatomen und Achsensystemen abgeleitet. Die Strukturtheorie will aber den Aufbau mit Hilfe einer Formel aus einem einzigen Ausgangsatom gewinnen. Um die Vergleichung der Tatsachen mit den Typen der vorstehenden Zusammenstellung zu erleichtern, empfiehlt sich die frühere Darstellungsweise, angewandt auf vier zu einer Fläche (etwa $a_1\,a_2$) des Vollwürfels parallele Ebenen im Abstand 0, $\frac{1}{4}a_3$, $\frac{2}{4}a_3$, $\frac{3}{4}a_3$, die mit 0, 1, 2, 3 bezeichnet werden mögen.

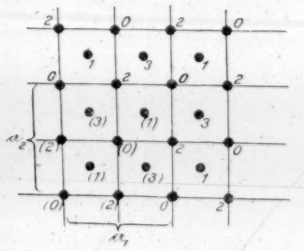


Fig. 77.

Die Atomgruppierung innerhalb der Periode $a_3$ stellt sich dann dar gemäß Fig. 77.

Auf den über der Grundfläche $a_1\,a_2$ liegenden Vollwürfel entfallen dabei acht Atome.

Zu solchen acht Atomen kann man nun mit Hilfe der Formel des Sohnckeschen Typs Nr. 64 gelangen, wenn man das Ausgangsatom speziell in den o-Punkt der Konstruktion Fig. 74 legt. Die Schraubenachse $\mathfrak{A}_1(4,+1)$ gibt aus demselben innerhalb der Periode die weiteren drei Punkte mit den Koordinaten ($\frac{1}{4}a_3 = b_3$ gesetzt): $b_1, b_2, b_3$; $2b_1$, o, $2b_3$; $3b_1$, $-b_2$, $b_3$, und die Achse $\mathfrak{D}_3(3,0)$ fügt hinzu (durch zyklische Vertauschung der Indizes zu erhalten): $b_1, b_2, b_3$, $2b_1$, $2b_2$, o; $b_1$, $3b_2$, $-b_3$ und $b_1, b_2, b_3$; o; $2b_2$, $2b_3$; $-b_1, b_2, 3b_3$. Da die $a_4 = 4b_3$ die Perioden darstellen, so sind die Punkte mit Koordinaten $-b_3$ (die außerhalb des Vollwürfels liegen) äquivalent mit solchen von den Koordinaten $3b_3$, und man erhält als Punktsystem innerhalb des Vollwürfels: o, o, o; $b_1, b_2, b_3$; $2b_1$, o, $2b_3$; $3b_1, 3b_2, b_3$; $2b_1, 2b_2$, o; $b_1, 3b_2$, $3b_3$; o, $2b_2, 2b_3$; $3b_1, b_2, 3b_3$. Das sind aber die acht in der Figur mit eingeklammerten Zahlen markierten Punkte. Die Enantiomorphie des Typs Nr. 64 kommt bei der speziellen Lage des Ausgangsatoms nicht zur Geltung. Die Symmetrie des *C*-Atoms im Diamant läßt sich durch die Art der Entstehung seiner Struktur aus dem allgemeinen Typ Nr. 64 erschließen; man findet sie tetraedrisch, wie das auch der Anordnung der Nachbaratome um ein beliebig gewähltes Atom entspricht. Es ist bekannt, daß Bragg diese Anordnung als den Ausdruck der Lage der vier *C*-Valenzen nach den Ecken eines umschriebenen Tetraeders betrachtet.

Der Aufbau der hemimorph-hemiedrisch kristallisierenden Zinkblende (*ZnS*) läßt sich durch die Fig. 77 beschreiben, wenn man in den Punkten o und 2 *Zn*-, in den Punkten 1 und 3 *S*-Atome angebracht denkt. Die beiden Strukturen fallen unter den Typ Nr. 55; die erstere entspricht einem Ausgangsatom im o-Punkt, die zweite einem solchen im Zentrum eines Achtelwürfels. Das weitere folgt daraus wie oben.

Der Aufbau des holoedrischen Flußspats ($CaF_2$) ergibt sich, wenn man in Fig. 77 die Punkte in den Mitten quadratischer Felder mit 1 und 3 bezeichnet. Die Struktur fällt in demselben Sinne unter den Typ-Nr. 60, wie die von Zinkblende unter Nr. 55. Auch hier kann auf weitere Auseinandersetzung verzichtet werden.

Ähnliche Überlegungen, wie oben an die Struktur von *KCl* und verwandter Verbindungen, lassen sich an diejenige von Kuprit ($Cu_2O$) anknüpfen, die einer holoedrischen Symmetrie entspricht, obwohl die Substanz hemimorph-hemiedrisch kristallisiert. Der Aufbau kann beschrieben werden als bestehend aus einem zentrierten kubischen Raumgitter $\Gamma''$ für die *O*-, einem flächenzentrischen $\Gamma'$ für die *Cu*-Atome, die gegeneinander um $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3)$ verschoben sind. Es muß genügen, hierauf nur hinzuweisen.

Es mag erinnert werden, daß alle bisher besprochenen Fälle regulärer Kristalle sich glatt unter Sohnckesche Strukturtypen ordnen ließen, und nirgends eine Deckoperation zweiter Art heranzuziehen war. Dies scheint nicht mehr durchführbar zu sein bei der strukturtheoretischen Deutung der Atomanordnung in Pyrit ($FeS_2$),

der paramorph-hemiedrisch nach $\{C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2\}$ kristallisiert.

Die für diesen Kristall von den Braggs aus der Beobachtung erschlossene Atomverteilung geht dahin, daß die Eisenatome in den Knotenpunkten eines flächenzentrischen kubischen Raumgitters $\Gamma_c'$ liegen, die Schwefelatome hingegen in den nach S. 446 „windschiefen" Diagonalen der Achtelwürfel, in einem Abstand vom Zentrum, der kein kleinzahliger Bruchteil der Diagonale zu sein, aber in der Nähe von $^1/_5$ zu liegen scheint.

Für die Vergleichung mit den theoretischen Typen ist es vorteilhaft, den Aufbau der $S$-Atome wieder in der schon mehrfach benutzten Weise darzustellen. Wir legen dazu in den Vollwürfel parallel zu der Fläche $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2$ vier Ebenen in den Abständen $u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 - u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 + u$, $\mathfrak{a}_3 - u$, wobei $u < \frac{1}{4}\mathfrak{a}_3$, und bezeichnen die Atome in diesen vier Ebenen durch deren Ordnungsnummer 1, 2, 3, 4; dann entsteht für die parallel $\mathfrak{a}_3$ be-

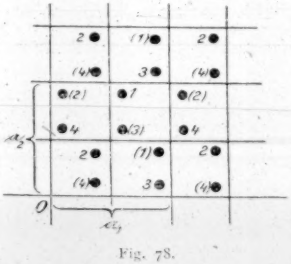



Fig. 78.

trachtete Anordnung das in Fig. 78 wiedergegebene Bild; die Abstände der Atome von den nächsten Seiten der Viertelquadrate sind jedesmal gleich $u$.

Um diesen Aufbau mit den Strukturtypen zu vergleichen ist es bequem, zunächst den in demselben enthaltenen Spiegelpunkt zu beseitigen. Dies geschieht, indem man die mit (1), (2), (3), (4) bezeichneten Atome hinwegdenkt. Das so vereinfachte System von nur vier Atomen entspricht nun, wie man leicht sieht, dem Typ Nr. 57, dessen maßgebende Achsen in Fig. 65 dargestellt sind. Ein Ausgangspunkt mit den Koordinaten $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 - u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 - u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 - u$ liefert nämlich durch die Deckoperation $\mathfrak{A}_1(2,1)$, $\mathfrak{D}(3,0)$ bei Berücksichtigung der Periodizität $\mathfrak{a}_i$ innerhalb des Vollwürfels insgesamt die Punkte: $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 - u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 - u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 - u$; $\mathfrak{a}_1 - u$, $u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_3 + u$; $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_1 + u$, $\mathfrak{a}_2 - u$, $u$; $u$, $\frac{1}{2}\mathfrak{a}_2 + u$; $\mathfrak{a}_3 - u$, und das sind genau die Punkte 2, 3, 1, 4 in Fig. 78, zu denen nun noch die Spiegelpunkte (1), (2), (3), (4) hinzuzunehmen sind, um das vollständige System zu liefern.

Die Anordnung der $S$-Atome im Pyrit entspricht also dem Typ 57 $c$, a in der Ausartung, daß das Ausgangsatom auf der dreizähligen Achse $\mathfrak{D}(3,0)$ nahe dem Mittelpunkt des Vollwürfels liegt. Die spezielle Lage des Ausgangsatoms ist dabei durch das Zusammenrücken von den drei durch $\mathfrak{D}(3,0)$ verknüpften Punkten entstanden zu denken. Es ist somit dem betr. $S$-Atom eine dreizählige Achse $(A_d^3)$ parallel der Diagonale $\mathfrak{D}(3,0)$ beizulegen. Dem Ausgangsatom muß nun ein ihm bezüglich des Würfelzentrums spiegelbildlich entsprechendes Atom zugeordnet werden. Da die Annahme zweier spiegelbildlichen Atomarten aber sonst durch nichts nahe gelegt wird, so hat man jedem $S$-Atom außer der Achse $A_d^3$ noch solche Symmetrieelemente beizulegen, daß zwei Atome die dem Würfelzentrum die gleiche Seite der Achse $A_d^3$ zukehren, Spiegelbilder voneinander sind. Dazu genügt, daß durch $A_d^3$ eine Symmetrieebene geht und die zwei Atome angemessen gegeneinander orientiert sind. Ähnlich muß man alle übrigen Paare von $S$-Atomen des Systems gebildet denken. Das $S$-Atom würde dann mindestens die Symmetrie $\{A_3^3, E_x\}$ der hemimorphen Hemiedrie des trigonalen Systems haben.

Den Aufbau der $Fe$-Atome nach dem Raumgitter $\Gamma_c'$ leitet man am konsequentesten aus demselben Typ Nr. 57 $c$, a ab, indem man das Ausgangsatom in den Koordinatenanfang legt.

Die vorstehend gegebene Deutung der Anordnung der $S$-Atome im Pyrit wird in bedeutungsvoller Weise gestützt durch die für Kobaltglanz ($CoSAs$) nachgewiesene Struktur. Dieselbe entsteht aus derjenigen von Pyrit durch Ersetzung der $Fe$- durch $Co$-Atome und Vertauschung der Hälfte der $S$- mit $As$-Atomen. Kobaltglanz kristallisiert regulär hemimorph nach der Formel $\{S_x, S_y\}$, entbehrt also des Zentrums $C$. Dieser Symmetrie wird entsprochen, wenn man in dem Schema Fig. 78 die Punkte (1), (2), (3), (4) mit $As$-Atomen besetzt. Es entspricht dann die Anordnung sowohl der $S$- wie der $As$-Atome dem Sohnckeschen Typ Nr. 57. Auf die allgemeine Bedeutung der Strukturen von $FeS_2$ und $CoSAs$ wird am Schlusse dieser Arbeit eingegangen werden.

## § 13. Diskussion der durch die Beobachtung erschlossenen Strukturen einiger trigonaler Kristalle.

Außer bei regulären Kristallen sind die Strukturen besonders vielfach bei trigonalen untersucht worden, und da manche der hier erhaltenen

Resultate hervorragendes Interesse bieten, so mag über sie einiges berichtet werden.

Wismut, Antimon, Arsen; holoedrisch kristallisierend, besitzen nach der Beobachtung einen Aufbau, wo die Atome in den Ecken zweier axial gegeneinander verschobenen Rhomboeder liegen. Diese Anordnung läßt sich aus einem Ausgangsatom mit Hilfe des Sohnckeschen Typs des zusammengesetzten Rhomboedersystems Nr. 21 ableiten.

Bei diesem tragen die Achsen $\mathfrak{A}$ des Schemas (Fig. 31) zusammengesetzte ebene Dreipunkter (Fig. 33') in solchen Höhen, daß die Zentren von acht benachbarten in den Ecken eines Rhomboeders liegen. Ziehen sich die Dreipunkter nach der zugehörigen Achse $\mathfrak{A}$ hin zusammen, so wird aus jedem von ihnen ein Punktpaar, durch dessen Mitte die Querachse $\mathfrak{L}(2,0)$ hindurchgeht. Damit ist der beobachtete Typ gewonnen. Den wirklichen Atomen ist nach dieser Entstehung des Aufbaues jedenfalls eine dreizählige Achse beizulegen; damit das Atompaar die volle holoedrische Symmetrie $(C, A_z^3, A_x^\nu)$ der bezüglichen Kristalle aufweise, muß jedes Atom noch eine Symmetrieebene normal zu $\mathfrak{L}$ besitzen.

Die Struktur des enantiomorph-hemiedrischen Quarzes ($SiO_2$), — Formel $(A_z^3, A_x^\nu)$ — erledigt sich sehr einfach. Die $O$-Atome gruppieren sich gemäß dem Sohnckeschen Typ Nr. 18/19 (rechtes und linkes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem) und die $Si$-Atome gemäß dessen Ausartung, die entsteht, wenn das Ausgangsatom auf der Querachse liegt. Da die Anzahl der $O$-Atome die größte dem Typ entsprechende ist, so gibt die Struktur über deren Symmetrie keinen Aufschluß; für das $Si$-Atom liefert sie die Notwendigkeit einer zweizähligen Symmetrieachse.

Der Atomaufbau von Graphit läßt sich nach den Beobachtungen von Debye und Scherrer[1]) folgendermaßen beschreiben. Parallel der Spaltungsebene der Substanz denke man innerhalb der Periode $c$ drei Ebenen und in einer jeden $C$-Atome in einem regulär sechseckigen Netz derart angebracht, daß in der zweiten und dritten Ebene die Zentren der Maschen über verschiedenen Maschenecken der ersten Ebene liegen. Fig. 79 gibt diesen Aufbau in der früheren Weise wieder und deutet durch die Zahlen 1, 2, 3 die Ordnungszahl der Ebenen an, in denen die bezüglichen Atome liegen. Dieser Aufbau entspricht jedenfalls der Symmetrie des trigonalen Systems.

Von den Sohnckeschen Typen ist es Nr. 22/23

1) P. Debye und Scherrer, diese Zeitschrift 18, 291, 1917.

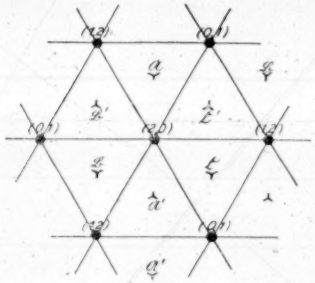


Fig. 79.

(rechtes oder linkes abwechselndes Dreipunktschraubensystem) mit der Formel $\mathfrak{A}(3+1)$, $\mathfrak{L}_a(2,0)$, $a$, $c$, welches diesen Aufbau umfaßt. Die diesem Typ im allgemeinen entsprechende Atomanordnung ist in Fig. 80 durch Punkte ● wiedergegeben. Liegt die Querachse $\mathfrak{L}_a$ um $h$ über der Nullfläche, so sind die Höhen der Punkte $0'$, $1'$, $2'$ bzw. gleich $2h$, $\frac{1}{3}c+2h$, $\frac{2}{3}c+2h$. Nun kann man die Höhen von $0'$, $1'$, $2'$

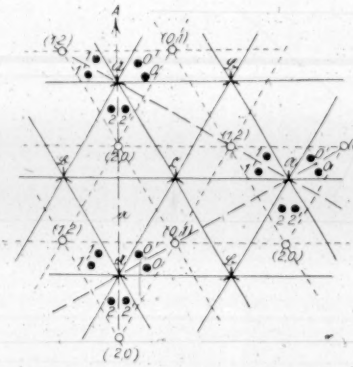


Fig. 80.

bzw. mit denen von 1, 2, 0 — oder wegen der Periode $c$ mit 1, 2, 3 — zusammenfallen lassen, wenn man $h=\frac{1}{6}c$ macht; legt man weiter das Ausgangsatom in die Vertikalebene durch $a$, und zwar in den Abstand $\frac{1}{3}a$ von $\mathfrak{A}$, so gelangt man zu dem Aufbau, der in Fig. 80 durch die ○ mit den eingeklammerten Zahlen angedeutet ist. Das ist aber genau das, was nach Fig. 79 die Beobachtung ergeben hat; die punktierten Linien in Fig. 80 entsprechen dabei dem Netz in Fig. 79.

Es ist bemerkenswert, daß das Dreipunktschraubensystem Nr. 22 23 im allgemeinen enantiomorph ist, nämlich eine Rechts- und eine Linksbildung umfaßt. Bei der beschriebenen speziellen Ausbildung ist dieser Charakter verschwunden. Die Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ haben allerdings alle denselben Drehungssinn, aber zwischen ihnen treten, wie Fig. 79 zeigt, im vorliegenden Falle weitere Schraubenachsen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ von entgegengesetztem Drehungssinn auf, wodurch der frühere enantiomorphe Charakter aufgehoben wird.

Da die Anzahl der $C$-Atome im Elementarbereich mit der maximalen aus der Strukturformel folgenden übereinstimmt, so ist hier aus dem Strukturtyp ein Schluß auf die Atomsymmetrie zunächst nicht möglich, und auch eine Heranziehung der Symmetrie des Graphitkristalls ist nicht angängig, da dieselbe nicht feststeht. Die aus Fig. 79 ersichtliche Tatsache, daß jedes $C$-Atom im Mittelpunkt eines gleichseitigen Dreiecks liegt, dessen Ecken gleichfalls von $C$-Atomen besetzt sind, legt natürlich den Schluß nahe, daß das Atom eine dreizählige Symmetrieachse und drei durch dieselbe gehende Symmetrieebenen besitze. Die Entdecker der Struktur nehmen an, daß von den vier Valenzen des $C$-Atoms drei nach jenen Nachbaratomen und die vierte normal zu deren Ebene gerichtet wäre; das $C$-Atom würde also in Graphit und Diamant verschiedene Natur haben. —

Schließlich mag noch auf die strukturtheoretische Deutung der von W. H. Bragg angegebenen komplizierten Atomanordnungen in Kalkspat ($CaCO_3$[1]) und Dolomit ($CaMg(CO_3)_2$) eingegangen werden, die bzw. der Holoedrie $\{C, A_z^3, A_x^2$ oder $C, A_z^3, E_x\}$ und der paramorphen Hemiedrie $\{C, A_z^3\}$ zugehören. Zur Darstellung zunächst der Struktur von Kalkspat mögen innerhalb der Periode $c$ zwölf Ebenen 0, 1, ... 11 normal zu $A_z^3$ gelegt werden. Die $Ca$-Atome nehmen dann die in Fig. 81 durch ⊙ bezeichneten Plätze ein, wobei jede Zahl 3, 5, 7 durch 9, 11, $13 \equiv 1$ ergänzt zu denken ist. Sie bilden also dieselbe Anordnung in den Ecken zweier parallel $A_z^3$ gegeneinander verschobenen Rhomboeder, wie die Atome von $Bi$, $Sb$, $As$, von denen im Eingang dieses Paragraphen gesprochen ist. Die $C$-Atome liegen in denselben Vertikalen, wie die $Ca$-Atome, je in der Mitte zwischen zwei von jenen; sie verhalten sich diesen also strukturell genau analog. Die $O$-Atome bilden ebene Dreipunkter um die $C$-Atome, und zwar für zwei vertikal einander

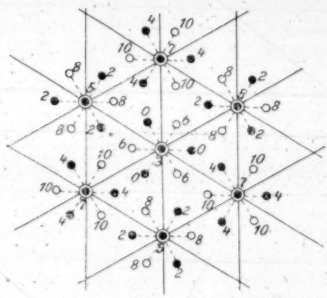


Fig. 81.

folgende um beiläufig 60° gegeneinander gedreht, wie das die ● und ○ mit den beigesetzten (geraden) Zahlen in Fig. 81 veranschaulichen. Die $O$-Atome entsprechen demnach demselben Sohnckeschen Typ Nr. 21 $\{\mathfrak{A}(3,0), \mathfrak{L}(2,0), \mathfrak{a} + \frac{1}{3}\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ der auch die Konfiguration der $Ca$- und $C$-Atome umfaßte, — ein Umstand, der auch die gegebene Deutung der letzteren Anordnungen stützt. Es sind somit auch zur Darstellung der Struktur von Kalkspat (wie dergleichen von Magnesit $MgCO_3$ und Natronsalpeter $NaNO_3$) Deckoperationen zweiter Art nicht erforderlich. Das $Ca$-, wie das $C$-Atom muß parallel $A_z^3$ eine dreizählige Symmetrieachse besitzen, und die Kombination der beiden gleichartigen durch die Querachse verknüpften Atome außerdem nach der Kristallform noch ein Symmetriezentrum. Das $C$-Atom erscheint dabei in einer Anordnung, die der in Graphit analog ist und von der im Diamant abweicht.

Über die Symmetrie der $O$-Atome ergibt die Struktur keine Auskunft. Der Typ Nr. 21 entspricht der Symmetrie $\{A_z^3, A_x^2\}$; das ihr zur Holoedrie $\{C, A_z^3, A_x^2\}$ fehlende Symmetriezentrum muß sonach durch die Eigensymmetrie der $O$-Atome bedingt sein. Die Dreipunkterpaare der $O$-Atome gewinnen jedenfalls die holoedrische Symmetrie, wenn jedes Atom eine durch die Achse hindurchgehende Symmetrieebene besitzt. Die Zweiwertigkeit des $O$-Atoms legt aber vielleicht den Gedanken an eine rotatorische Symmetrie, die Rotationsachse nach dem zentralen $C$-Atom hin, noch näher.

Hämatit ($Fe_2O_3$) und Rubin ($Al_2O_3$) besitzen Strukturen, deren Einordnung im wesentlichen mit der von Kalkspat erledigt ist. Die $O$-Atome haben dieselbe Lage wie in Kalkspat; die $C$-Atome sind beseitigt und die $Ca$-Atome durch ein axiales Paar $Fe$- bzw. $Al$-Atome ersetzt zu denken.

[1] Kalkspat analog aufgebaut ist auch Magnesit ($MgCO_3$) und Natronsalpeter ($NaNO_3$).

Die Struktur von Dolomit weicht nach Bragg nur darin von der für Kalkspat ab, daß an Stelle des doppelten Rhomboedergitters für die *Ca*-Atome zwei einfache je für die *Ca*- und die *Mg*-Atome auftreten. Solche einfache Gitter werden von dem Sohnckeschen Typ Nr. 17 $(\mathfrak{P}(3,0), \mathfrak{a}+\frac{1}{3}\mathfrak{c}, \mathfrak{c})$ umfaßt, aus dem durch Hinzutreten der Querachse $\mathfrak{T}(2,0)$ der für die Doppelgitter heranzuziehende Typ Nr. 21 entsteht. Die Vertauschung des einen *Ca*- mit einem *Mg*-Atom bringt eben diese Querachse in Wegfall und bedingt damit die Wandelung der kristallographischen Symmetrie aus $(C, A^3_z, A^2_x)$ im $(C, A^3_z)$.

Die für Kristalle des trigonalen Systems festgestellten Strukturen ordnen sich sämtlich glatt unter die Sohnckeschen Typen und bestätigen was S. 246 im voraus gesagt ist. Von allen vorstehend besprochenen erfordert überhaupt nur die Struktur von Pyrit die Heranziehung der Fedorow-Schönflies schen Theorie. Man wird an dieser Tatsache nicht einfach vorbeigehen können. Sie regt offenbar erneut die Fragen an, die schon Sohncke gegenüber der Erweiterung seiner Theorie durch Deckoperationen zweiter Art empfand. Letztere setzen für dasselbe Element zwei sich spiegelbildlich entsprechende Atome voraus, die nur dann zusammenfallen, wenn jedes Atom spiegelbildliche Eigensymmetrie besitzt. Man wird, solange nicht andere Beobachtungen das Gegenteil feststellen, den letzteren Fall als allgemein erfüllt betrachten. Wenn aber nur eine Atomart vorhanden ist, so läßt sich ein jedes Atom mit jedem andern durch eine Operation dieser Art zur Deckung bringen, und es entsteht daraus das Verlangen nach einem Weg zu Strukturen, die nicht unter die Sohnckeschen 65 fallen, der die Operationen zweiter Art vermeidet. Sohncke hat, wie S. 239 bemerkt, den bezüglichen Weg in der Einführung mehrerer Ausgangsatome für die Deckoperationen gesehen[1]). Die Ergebnisse der Analyse von Strukturen durch die Beobachtung ist m. E. dieser Auffassung nicht ungünstig und eine Reduktion der im allgemeinen 230 Strukturtypen auf nur 65 wesentlich verschiedener wäre gewiß zu begrüßen. Die oben besprochenen Fälle von Kalkspat — Dolomit, Pyrit — Kobaltglanz, bei denen der Übergang vom ersten zum zweiten sich vollzieht, indem in einer Struktur mit Atompaaren das eine Atom jedes Paares durch das eines andern Elements ersetzt wird, legen sie offenbar besonders nahe. Eine eigene Stellung nimmt dabei der zweite Fall ein, bei dem die Struktur mit Atompaaren (Pyrit) sich keinem Sohnckeschen Typ unterordnet, wohl aber die daraus durch Austausch des einen Atoms entstehende (Kobaltglanz). Die Möglichkeit von Auswechselungen der geschilderten Art läßt offenbar die Glieder jener Atompaare strukturell nicht besonders eng verknüpft erscheinen und legt es nahe, die einzelnen Glieder auf eigene Ausgangsatome zurückzuführen. Unzweifelhaft ist die Fedorow-Schönfliessche Theorie der erweiterten Sohnckeschen an Geschlossenheit überlegen; aber die letztere entbehrt doch auch nicht ihrer eigenen Vorzüge.

1) Denselben Standpunkt vertritt Sommerfeld in seiner „Physikalischen Kristallographie". Leipzig 1907.

Göttingen im März 1918.

(Eingegangen 11. April 1918.)

# BESPRECHUNGEN.

**Alfred Wegener, Das detonierende Meteor vom 3. April 1916, 3½ Uhr nachmittags in Kurhessen.** (Aus den Schriften der Ges. z. Beförderung d. gesamten Naturwissenschaften zu Marburg. XIV. Bd. 1. Heft.) gr. 8. 83 S. mit vielen Abbildungen. Marburg a. L. N. C. Elwertsche Verlagshandlung (G. Braun). 1917. M. 2.—

Der Verf. hat unter Beihilfe einer großen Anzahl von Beobachtern und andern sich für diesen Meteoritenfall interessierender Leute ein umfangreiches Material über dieses Ereignis zusammengebracht und dasselbe in ausgiebigster Form einer systematischen Bearbeitung unterworfen, die zu vielerlei bemerkenswerten Resultaten geführt hat. Es dürften nur wenige Meteoritenfälle in so vollkommener Weise Gelegenheit gegeben haben, alle dabei in Betracht kommenden Erscheinungen zu verfolgen und bis zur schließlichen Auffindung des zur Erde gekommenen Meteorsteines in Verbindung miteinander zu bringen. Zunächst gibt der Verf. die Mitteilungen von über hundert Beobachtungsstellen, und stellt dieselben nach Zeit, Ort und nach ihren Einzelheiten, die sich auf die Höhe über dem Horizont, das Azimut der Wahrnehmung, die Lichterscheinungen und die dabei aufgetretene Rauchentwicklung und die Schallphänomene beziehen, zusammen.

Auf graphischem Wege ist der Verf. zu Schlüssen über die Höhe des Meteors zur Zeit seiner Sichtbarkeit und über die Länge der durchlaufenen Bahn, sowie zu Angaben betr. des Ortes seines Niederfalles gekommen, der sich nachträglich auch gut bestätigt hat. Von besonderem Werte sind in dem Schriftchen die außerordentlich vielen Vergleiche mit früheren Ereignissen ähnlicher Art, die der

Verf. aus einer umfangreichen, am Schlusse chronologisch zusammengestellten Literatur, verwertet hat, woraus hervorgeht, daß die aus der Erscheinung geschlossenen Tatsachen sich zum größten Teil sehr gut in die Ergebnisse früherer Ermittelungen einfügen. Die Höhe für die erste Wahrnehmung folgt zu etwa 80—90 km, die des Erlöschens zu nahe 16 km, bei einem Durchmesser der leuchtenden Masse von nahezu 400 m. Von besonderem physikalischen Interesse sind die Schlüsse, die der Verf. aus den wahrgenommenen Lichterscheinungen und den Färbungen auf die Konstitution der Atmosphäre glaubt ziehen zu können, indem er die anfängliche grünliche Färbung auf die Durchfahrung der „Wasserstoffsphäre" und die spätere rötliche und intensiv rote Farbe des Meteors auf seinen Weg durch die „Stickstoffsphäre" zurückführt im Gegensatz zu v. Niessl, dessen Untersuchungen über Meteorfälle besonders vielseitig sind und stets zum Vergleich herangezogen werden, der aber den Wechsel der Färbung durch eine abnehmende Temperatur des Meteors glaubt erklären zu sollen. —

Über die Auffindung dieses interessanten Meteors in dem Rommershausener Wald bei Treysa, also ganz nahe der von Wegener aus den gesammelten Beobachtungen rechnerisch ermittelten Stelle und seine physikalische Beschaffenheit hat Herr Geheimrat Richarz in der Marburger Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften und in der Sitzung des Marburg-Gießener physikalischen Kolloquiums nähere Mitteilungen gemacht, und eine zusammenfassende Bearbeitung von ihm wird, wie der Verf. mitteilt, demnächst erscheinen. —

Kurze Angaben über diese Referate finden sich in „Die Naturwissenschaften", Heft 22 und 39 des Jahrganges 1917. — A.

**A. Sommerfeld, Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung durch Röntgenstrahlen.** (Vorgetragen an der Universität München.) 15×25 cm, 16 S. mit 13 Abbildungen. Sonderabdruck aus der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure. Berlin, Julius Springer. 1917. M. 1.20

Der Charakter des vorliegenden Vortrages entspricht vorzüglich seinem Zweck, einem weiteren nicht fachmännisch gebildeten Zuhörerkreis einige Einblicke in die wunderbaren Geheimnisse der Atomstruktur zu gewähren, die die Forschung der letzten Jahre zu lüften vermochte. Wie reichhaltig dabei trotz der Kürze des Vortrages das Dargebotene ist, ersieht man am besten aus der Aufzählung der Kapitelüberschriften:

1. Die Atome und ihre Anordnung im natürlichen System der Elemente. 2. Radioaktivität, α- und β-Strahlen. 3. Rutherfords Kerntheorie. Die Kernladung als Ordnungszahl des Systems der Elemente. 4. Beispiele von Atom- und Molekül-Modellen. 5. Die Spektralanalyse der Röntgenstrahlen. Die charakteristischen Röntgenspektren. 6. Röntgenspektren und natürliches System der Elemente. Gegensatz zwischen Röntgenspektren und sichtbaren Spektren. 7. Quantentheorie der Spektrallinien.

Die Frische der Darstellung macht die Lektüre des Aufsatzes auch für den mit dem Gebiet vertrauten Physiker sehr empfehlenswert und genußreich. Besonders interessieren werden ihn die drei Gesetze der Elektronenbewegungen im Atominnern, die Sommerfeld in origineller Weise in Analogie zu den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegungen formuliert hat. Diese Gesetze bilden einen anschaulichen Ausdruck der grundlegenden Erkenntnisse, die die glanzenden Arbeiten Sommerfelds ergaben, als er die Bohrschen Annahmen über das Zustandekommen der Spektrallinien auf Ellipsenbahnen ausdehnte. Dadurch wurde es ihm möglich, die Feinstruktur des Wasserstoff- und Heliumspektrums sowie der charakteristischen Röntgenspektren weitgehend aufzuklären. Über diese Fragen findet man in dem vorliegenden Vortrag allerdings nur kurze Andeutungen und man legt die Broschüre aus der Hand mit dem lebhaften Wunsch, bald aus der Feder des Verfassers eine eingehendere zusammenfassende Darstellung des Gebietes zu erhalten.

K. Fajans.

**H. Bock, Die Uhr. Grundlagen und Technik der Zeitmessung.** 8. V. u. 121 S. mit 55 Abbildungen im Text. 2. umgearbeitete Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 1.20. geb. M. 1.50

Das der bekannten Teubnerschen Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt" als Nr. 216 zugehörende Bändchen gibt einen recht guten Überblick über die Einrichtungen unserer Pendel- und Taschenuhren. Eine kurze Erläuterung der astronomischen Grundlagen der Zeitmessung ist der Beschreibung der Uhren selbst vorausgeschickt. Der Verf. gibt in engem Rahmen die Beschreibung und Wirkungsweise der einzelnen Teile einer Uhr und erläutert außer dem äußeren Aufbau in den einzelnen Kapiteln das Wesen und den Zweck der Hemmungen, die verschiedenen Arten der als Antriebskräfte benutzten Einrichtungen, die Herstellung und Anordnung der Räder mit Zahnformen und die Achsensysteme. Besonders ausführlich, wenn auch in dem Rahmen des Buches natürlich durchaus nicht erschöpfend, sind die als „Regler" benutzten Pendel und Unruh-Konstruktionen mit ihren Kompensationsvorrichtungen beschrieben. Wobei auch deren geschichtliche Entwickelung mit eingeflochten ist. Die sogenannten „Gänge" werden in ihren Hauptformen für transportable und fest aufgestellte Uhrwerke sehr eingehend beschrieben. Die Methoden der Gangregulierung werden aufgezählt und in ihrer Wirkungsweise beleuchtet, was auch für den Nichtfachmann, der aber doch seine Uhr in guter Übereinstimmung mit der wirklichen Zeit halten will, von erheblichem Wert sein dürfte.

Schließlich sind noch drei Kapitel der Zeitübermittlung für größere Uhrenanlagen in Instituten, Städten und ganzen Ländern, sowie der Beurteilung der Güte der Uhren und ihrer Fabrikation gewidmet. Auf S. 18 mag ein sinnstörender Druckfehler berichtigt werden, es muß dort bei der Berechnung der Pendellänge anstatt „Sekunde" Minute gesetzt werden, denn für ein Minutenpendel gilt die errechnete Pendellänge. — Bei der Aufzählung der Fabrikanten von erstklassigen Pendeluhren hätten neben den heute allerdings in erster Linie stehenden Riefleruhren auch die von Knoblich, Bröcking oder Dencker in Hamburg, von Hohwü in Amsterdam erwähnt werden können. Wenn auch manche ungleichförmige Behandlung des Stoffes vorhanden ist, so kann das Werkchen doch als ein sehr zu empfehlender Leitfaden allen denen und darunter auch besonders denjenigen Forschern empfohlen werden, denen es bei ihren Arbeiten auf genaue Zeitangaben ankommt, die aber der einschlägigen Materie nicht so nahe stehen, wie z. B. der Astronom, für den

seine Uhr eines der wesentlichsten Meßinstrumente ist und der infolgedessen natürlich über deren Bau und Einrichtung ganz genau unterrichtet sein muß. — A.

**R. Biedermann, Die Sprengstoffe, ihre Chemie und Technologie.** Aus der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt". 286. Bd. IV u. 124 S. mit 12 Abbildungen. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1917. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das Bändchen wendet sich wie die ganze Sammlung an den großen Kreis der Gebildeten, nicht an den Fachmann. Es versteht sich bei der Stellung des Verf. als Mitglied des Patentamtes, der zugleich seit langen Jahren den Chemiker-Kalender herausgibt, daß es in dem genannten Rahmen einen sachgemäßen Überblick bietet und auf der Höhe ist. Es bespricht die Sprengstoffabrikation in ihrer geschichtlichen Entwicklung, sodann die Theorie der Sprengstoffe, d. h. Druck-, Wärmeentwicklung, Empfindlichkeit usw. und schließlich die Technologie derselben im einzelnen, also Nitroglyzerin, Schießbaumwolle usf. Naturgemäß kann die Darstellung nur an der Oberfläche bleiben und muß der Kürze wegen sich meist auf das Grundsätzliche und praktisch Bedeutsame beschränken. Am Schlusse ist ein Literatur-Verzeichnis für weitergehende Bedürfnisse angefügt. Die zweite Auflage hat trotz der Zensur noch mancherlei aufgenommen, was, wie das Sprengluft-Verfahren mit Ruß — nicht mit Holzkohle —, erst durch die Nöte des Krieges seine große Bedeutung entfalten konnte.

Das Büchlein ist daher dem Physiker zu empfehlen, um sich schnell einen Überblick über den praktisch wichtigen Teil dieses ihm fremden Gebietes zu verschaffen, aber auch der Chemiker wird mit Interesse und Nutzen die Kurze Darstellung gern in sich aufnehmen und überrascht sein, wie fruchtbringend die jüngste Zeit auf diesem, früher bei uns sehr vernachlässigten Gebiete gewesen ist.

Lothar Wöhler.

**F. A. Schulze, Große Physiker.** Band 324 der Sammlung „Aus Natur und Geisteswelt". Zweite Auflage. IV u. 115 S. mit 6 Bildnissen. Leipzig, B. G. Teubner. 1917. M. 1.50, geb. M. 2.—

Die Schrift, die unter dem Namen „Die großen Physiker und ihre Leistungen" im Jahre 1910 in der bekannten Teubnerschen Sammlung erschienen war, liegt jetzt in zweiter Auflage mit verändertem Titel vor. Wie der Verf. im Vorwort selber sagt, hat es so viele wirklich große Physiker gegeben, daß es schwer war, diejenigen unter ihnen auszuwählen, die auf beschränktem Raume in erster Linie besprochen zu werden verdienten. Die Wahl fiel auf Galilei, Newton, Huygens, Faraday, Helmholtz, Hertz. So wird gewissermaßen ein Abriß der Entwicklungsgeschichte der Physik gegeben vom Beginn der modernen Naturforschung ab, den wir in jene Zeit legen dürfen, da die Lehren Kopernikus' und Keplers sich Eingang verschafften, bis in die Jetztzeit. Die Auswahl muß eine sehr glückliche genannt werden. Der Verf. gibt nicht eine Lebensbeschreibung der Physiker im eigentlichen Sinne, sondern mehr eine Würdigung ihrer Werke, soweit dies in dem engen Rahmen möglich ist. Der äußere Lebenslauf wird dabei nur in ganz großen Zügen geschildert. Spezielle Fachkenntnisse erfordert die Lektüre nicht, vielmehr wird jeder Gebildete, soweit er sich nur überhaupt für die Naturwissenschaften und ihre Entwicklung interessiert, das Buch mit Nutzen lesen. Jedem der sechs Abrisse ist ein Bildnis beigegeben.

Zu wünschen wäre, daß bei nötig werdender Neuauflage, verschiedene Sprachschnitzer beseitigt, stilistische und sprachliche Unebenheiten abgeschliffen würden, da durch sie nicht nur die Freude an der Lektüre, sondern stellenweise auch ein leichtes und schnelles Verständnis etwas beeinträchtigt wird. V. Pieck.

## Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

**Ernannt:** Der Privatdozent an der Deutschen Universität in Prag Dr. Arthur Scheller zum a. o. Professor für Astronomie an der Universität Innsbruck, der a. o. Professor an der Universität Innsbruck Dr. Friedrich Edler v. Lerch zum ord. Professor der Experimentalphysik ebendaselbst.

**Ehrungen:** Professor Dr. Niels Bohr in Kopenhagen wurde für seine Untersuchungen über die Konstitution der Materie und Serienspektren die Prof. C. M. Guldberg-Medaille von der Universität Kristiania verliehen.

**Verliehen:** Dem Privatdozenten für Chemie an der Universität Breslau Dr. Ernst König, dem Privatdozenten für Pharmazie und Nahrungsmittelchemie an derselben Hochschule Dr. Peter Danckwortt, dem Dozenten und Privatdozenten für Chemie und Technologie der Nahrungs- und Genußmittel und für gerichtliche Chemie an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Engelhardt Glimm, sowie dem Privatdozenten für reine Mathematik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Jacobsthal der Titel Professor.

**Vom Lehramt zurück:** Der Privatdozent für chemische Technologie an der Technischen Hochschule München Dr. Hugo Jacob.

**Gestorben:** Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Christiania Dr. Peter Ludwig Sylow, der Professor der Chemie an der Universität Bordeaux Pierre Blarez (im Felde gefallen).


## Gesuche.

**Physikerin,**

in Berlin promoviert, sucht wissenschaftliche Betätigung auf physikalischem oder physikalisch-chemischem Gebiet. Halbtagsstellung in Groß-Berlin bevorzugt. Angebote unter **S. H. 528** an die Physikalische Zeitschr., Leipzig, Königstr. 2.

**Physiker**

Dr. phil., mit Erfahrungen auf dem Gebiete der Elektronenemission und Vakuumtechnik, und langjähriger wissenschaftlicher Tätigkeit an physikalischen Hochschulinstituten, sucht geeignete Laboratoriumsstellung. In Frage kommt nur leitende Stellung mit hohem Gehalt und Gewinnbeteiligung. Angebote zu richten unter **S. H. 529** an die Geschäftsstelle der Physikalischen Zeitschrift in Leipzig, Königstraße 2.


Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

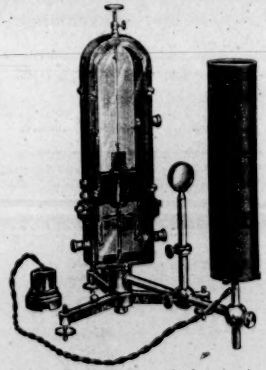
Moderne, neue Staaten benötigen solche modernen, aber altberühmten Instrumente wie Gáti's Barretter-Meßsatz in der Hochfrequenztechnik und in der Telephonie. Preis Rubel 250.— Béla Gáti, Budapest, IX. Gyáli-ut 22.

**Richard Müller-Uri,** Braunschweig
Schleinitzstr. 19

**Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.**

**Neuheiten:** Coulombmeter nach Stephan D.R.G.M. — Righis Röhren für magnetische Strahlen mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — Quecksilber-Schnellpumpe. — Präzisions-Vakuometer D.R.G.M. — Pizzarello-Apparat. — Apparate für flüssige Luft. — Verflüssigte Gase in Röhren. — Projektions- und Extrem-Thermometer. — Elektroskope und Trockensäulen. — Vakuumröhren nach Braun, Crookes, Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — Leuchtschirme. — Normal-Geißlerröhren-Serie „Kompendium". — Original-Vakuumskalen nach Croß.

**Max Kohl A.G. Chemnitz**
Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

**Physikalische Apparate**
**Funken-Induktoren**
**Ölluftpumpen**
**Experimentier-Schalttafeln**
**Projektions-Apparate**
**Laboratorienmöbel**
In gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

**DIE DEUTSCHE LEIHBÜCHEREI**
Berlin W. 35
liefert leihweise alle gewünschten wissenschaftlichen Neuerscheinungen und älteren Werke sowie größere Handbibliotheken allerorten unter vorteilhaften Bedingungen. Prospekte auf Wunsch.

Verlag von S. HIRZEL in Leipzig.

**Elektrische Spektralanalyse chemischer Atome**
von
**Dr. J. Stark**
Mit 4 Tafeln und 19 Figuren im Text
Preis geheftet M. 5.—, gebunden M. 6.—

## Inhaltsverzeichnis:

(B. = Besprechungen.)


Seite

Atombau, v. P. Debye u. P. Scherrer . . . . . 474
Brechungsexponent: Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den — im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer . . . . . 483
**Debye, P. u. P. Scherrer**, Atombau . . . . . 474
Eigenfrequenzen: Über den Einfluß ultraroter — auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer . . . . . 483
Erdachse: Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der —?, v. E. J. N. Brandt-Hinselmann. (B.) 487
**Hinselmann, E. J. N. Brandt**, Unveränderlichkeit oder Veränderlichkeit der Lage der Erdachse? (B.) 487
Interpolation: Newton, Cotes, Gauß, Jacobi, Vier grundlegende Abhandlungen über — und genäherte Quadratur, v. A. Kowalewski. (B.) . . . . . 488
**Kowalewski, A.**, Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur. (B.) . . . . . 488
Kreisel: Der — als Richtungsweiser, v. H. Usener. Bemerkungen hierzu, v. A. Sommerfeld u. H. Usener 487

Seite

**Lecher, E.**, Lehrbuch der Physik. (B.) . . . . . 486
Physik: Lehrbuch der —, v. E. Lecher. (B.) . . . 486
Quadratur: Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte —, v. A. Kowalewski. (B.) . . . . . 488
**Rubinowicz, A.**, Bohrsche Frequenzbedingung und Erhaltung des Impulsmomentes. II. . . . . 465
**Scherrer, P. u. P. Debye**, Atombau . . . . . 474
Spektralgebiet: Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren —, v. J. Wimmer . . . . . 483
Ultrarote Eigenfrequenzen: Über den Einfluß — auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet, v. J. Wimmer . . . . . 483
**Usener, H.**, Der Kreisel als Richtungsweiser. Bemerkungen hierzu, v. A. Sommerfeld u. H. Usener 487
**Wimmer, J.**, Über den Einfluß ultraroter Eigenfrequenzen auf den Brechungsexponenten im sichtbaren Spektralgebiet . . . . . 483



**DIE DEUTSCHE LEIHBÜCHEREI**

Berlin W. 35

liefert leihweise alle gewünschten wissenschaftl. Neuerscheinungen, Zeitschriften und ältere Werke sowie größere Handbibliotheken allerorten unter vorteilhaften Bedingungen. Prospekte auf Wunsch.

**Richard Müller-Url, Braunschweig** Schleinitzstr. 19

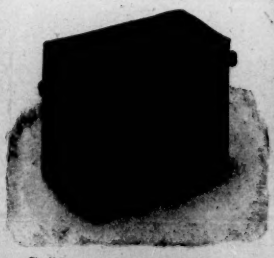
**Physikalische, chemische und meteorologische Unterrichts-Apparate und -Utensilien. — Glastechnische Präzisionsarbeiten.**

**Neuheiten: Coulombmeter** nach Stephan D.R.G.M. — Righis **Röhren für magnetische Strahlen** mit Vakuum-Regulierung D.R.G.M. — **Quecksilber-Schnellpumpe. — Präzisions-Vakuometer** D.R.G.M. — **Pizzarello-Apparat. — Apparate für flüssige Luft. — Verflüssigte Gase in Röhren. — Projektions- und Extrem-Thermometer. — Elektroskope** und **Trockensäulen. — Vakuumröhren** nach Braun, Crookes, Geißler, Puluj, Lecher, Röntgen, Wehnelt. — **Leuchtschirme. — Normal-Geißlerröhren-Serie** „Kompendium". — **Original-Vakuumskalen** nach Croß.

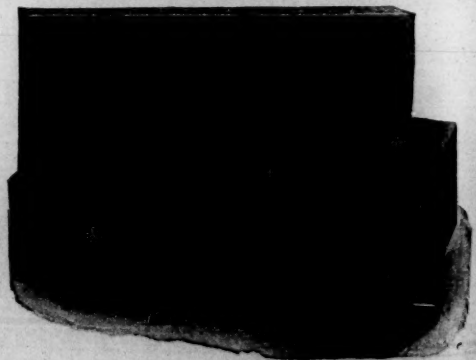
# Siemens & Halske A.-G.

**Wernerwerk — Siemensstadt bei Berlin**

## Kompensationsapparate



**Größe: 220 × 100 × 190 mm**
**Spannungsteiler zum Kompensationsapparat**



**Größe: 520 × 310 × 190 mm**
**Kompensationsapparat nach Prof. Raps**